



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ *JONES* ΔΥΟ
ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΚΑΙ ΤΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΑΥΤΟΥ
ΣΤΟΝ ΣΤΕΡΕΟ ΤΟΡΟ

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ Γ. ΧΡΟΝΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΥΣΑ: ΣΟΦΙΑ ΛΑΜΠΡΟΠΟΥΛΟΥ (Αν. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.)

ΑΘΗΝΑ, Φεβρουάριος 2008

Περιεχόμενα

| | | |
|----------|--|-----------|
| 0 | <i>Πρόλογος</i> | 5 |
| 1 | <i>Το Πολυώνυμο Jones 2-μεταβλητών</i> | 7 |
| 1.1 | Περί Κόμβων και Αναλλοίωτων Κόμβων | 7 |
| 1.1.1 | Τοπολογία Κόμβων στην S^3 | 7 |
| 1.1.2 | Αναλλοίωτες Κόμβων | 10 |
| 1.2 | Κοτσίδες | 11 |
| 1.2.1 | Η Ομάδα των Κοτσίδων | 11 |
| 1.2.2 | Συσχετισμός Κόμβων και Κοτσίδων | 15 |
| 1.3 | Το Πολυώνυμο Jones 2-μεταβλητών ή <i>HOMFLYPT</i> | 17 |
| 1.3.1 | Άλγεβρες <i>Hecke</i> \mathcal{A} | 17 |
| 1.3.2 | Η Συνάρτηση Ίχνους του <i>Oscneanu</i> | 18 |
| 1.3.3 | Ιδιότητες του Πολυωνύμου Jones 2-μεταβλητών | 21 |
| 2 | <i>Κοτσίδες Artin τύπου \mathcal{B} και Ίχνη Markou τύπου \mathcal{B}</i> | 25 |
| 2.1 | Η Ομάδα των Κοτσίδων τύπου \mathcal{B} | 25 |
| 2.2 | Ένα Ίχνος <i>Markou</i> για Άλγεβρες <i>Hecke</i> τύπου \mathcal{B} | 27 |
| 2.2.1 | Άλγεβρες <i>Hecke</i> τύπου \mathcal{B} | 27 |
| 2.2.2 | Κατασκευή Ίχνους <i>Markou</i> για Άλγεβρες <i>Hecke</i> τύπου \mathcal{B} | 30 |
| 2.3 | Ίχνη <i>Markou</i> για γενικευμένες και κυκλοτομικές Άλγεβρες <i>Hecke</i> τύπου \mathcal{B} | 32 |
| 2.3.1 | Γενικευμένες και Κυκλοτομικές Άλγεβρες <i>Hecke</i> τύπου \mathcal{B} | 32 |
| 2.3.2 | Κατασκευή Ιχνών <i>Markou</i> για γενικευμένες και κυκλοτομικές Άλ- γεβρες <i>Hecke</i> τύπου \mathcal{B} | 34 |
| 2.4 | Ταξινόμηση των Ιχνών <i>Markou</i> για Άλγεβρες <i>Hecke</i> τύπου \mathcal{B} | 40 |
| 2.4.1 | Συναρτήσεις Ίχνους σε Άλγεβρες <i>Hecke</i> τύπου \mathcal{B} | 40 |
| 2.4.2 | Ίχνη <i>Markou</i> σε Άλγεβρες <i>Hecke</i> τύπου \mathcal{B} | 44 |
| 3 | <i>Τα Ανάλογα του Πολυωνύμου Jones 2-μεταβλητών στον Στερεό Τόρο</i> | 47 |
| 3.1 | Κόμβοι στον Στερεό Τόρο | 47 |
| 3.2 | Θεωρήματα <i>Alexander</i> και <i>Markou</i> για Κόμβους στον Στερεό Τόρο | 48 |
| 3.3 | Κατασκευή Αναλλοίωτων για Κόμβους μέσα στον Τόρο | 51 |
| 3.3.1 | Μία Αναλλοίωτη Κόμβων μέσα στον Τόρο | 51 |

| | | |
|-------|---|----|
| 3.3.2 | Γενικευμένες και Κυκλοτομικές Αναλλοίωτες Κόμβων μέσα στον Τόρο | 52 |
| 3.4 | Σχέσεις <i>Skein</i> για Αναλλοίωτες Κόμβων μέσα στον Τόρο | 53 |

Κεφάλαιο 0

Πρόλογος

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία με θέμα “Το Πολυώνυμο *Jones* δύο μεταβλητών και τα Ανάλογα αυτού στον Στερεό Τόρο” αποτελείται από τρία κεφάλαια.

Για την παρουσίαση του πολυωνύμου *Jones* 2-μεταβλητών κρίνεται απαραίτητο να γίνει μια εισαγωγή στην Θεωρία Κόμβων (εφόσον και το πολυώνυμο *Jones* 2-μεταβλητών αποτελεί μια αναλλοίωτη κόμβων). Έτσι, στο Κεφάλαιο 1 περιγράφονται κάποιες βασικές έννοιες της Θεωρίας Κόμβων και παρουσιάζεται σταδιακά το ανοικτό, μέχρι σήμερα, πρόβλημα της ταξινόμησης των κόμβων.

Στο Κεφάλαιο 2 αρχικά θα δοθεί ο ορισμός των κοτσίδων *Artin* τύπου \mathcal{B} και της γεωμετρικής ερμηνείας αυτών, οι οποίες στην πραγματικότητα αποτελούν τις κοτσίδες που ζουν στον στερεό τόρο. Στο [Jon] τίθεται το ερώτημα αν άλλες άλγεβρες *Hecke* που αντιστοιχούν σε ομάδες *Artin*, μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τον ίδιο τρόπο όπως αυτές του τύπου \mathcal{A} . Στην συνέχεια λοιπόν, δίνονται οι ορισμοί των αλγεβρών *Hecke* τύπου \mathcal{B} και όλες οι πιθανές γενικεύσεις αυτών, που ονομάζονται γενικευμένες και κυκλοτομικές άλγεβρες *Hecke* τύπου \mathcal{B} . Το κεφάλαιο αυτό ολοκληρώνεται με την κατασκευή ιχνών *Markov* για καθέναν από τους τύπους \mathcal{A} και \mathcal{B} αυτών των αλγεβρών και με την ταξινόμισή τους για την “απλή” περίπτωση τύπου \mathcal{B} , βλ. [Lam1, Gel, Lam2].

Το τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο έχει ως στόχο την κατασκευή ανάλογων του πολυωνύμου *Jones* δύο μεταβλητών στον Στερεό Τόρο. Έτσι, αρχικά αναλύεται η τοπολογία των κόμβων μέσα στον τόρο και διατυπώνονται τα αντίστοιχα Θεωρήματα *Alexander* και *Markov*. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την κατασκευή αναλλοίωτων για κόμβους μέσα στον τόρο για όλων των ειδών τις άλγεβρας *Hecke* τύπου \mathcal{B} , βλ. [Lam2].

Κατά την μελέτη και συγγραφή της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας, ήταν σημαντική η συμπαράσταση της οικογένειάς μου και για αυτό ευχαριστώ θερμά την μητέρα μου Ελισσάβετ και τον αδελφό μου Παναγιώτη.

Κεφάλαιο 1

Το Πολυώνυμο Jones 2-μεταβλητών

1.1 Περί Κόμβων και Αναλλοίωτων Κόμβων

1.1.1 Τοπολογία Κόμβων στην S^3

Μπορούμε να φανταστούμε έναν κόμβο σαν ένα λεπτό και μπλεγμένο σκοινί του οποίου οι άκρες είναι ενωμένες. Ακόμα καλύτερα είναι να θεωρήσουμε ότι είναι κατασκευασμένος από λάστιχο και όχι από σκοινί. Λείος κόμβος ονομάζεται η εικόνα του κύκλου στο \mathbb{R}^3 κάτω από μια απείρως διαφορίσιμη εμφύτευση με μη μηδενικά διαφορικά:

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \neq (0, 0, 0).$$

Ουσιαστικά κόμβος είναι κάθε κλειστή μη-αυτοτενόμενη καμπύλη του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 και κρίκος είναι ένα σύνολο από (λείες) κλειστές μη αυτοτενόμενες καμπύλες του \mathbb{R}^3 , οι οποίες μπορεί να μπλέκονται και μεταξύ τους. Κατά πάσα πιθανότητα στην προσπάθειά μας να φανταστούμε καποιον κόμβο ή κρίκο τον φανταστήκαμε στις τρεις διαστάσεις. Αυτό είναι απολύτως φυσιολογικό από την στιγμή που η λέξη **μπλεγμένο** μας παραπέμπει αυτόματα στις τρεις διαστάσεις. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι οι κόμβοι “ζουν” στις τρεις διαστάσεις. Επιπλέον λόγω της φύσης του (ελαστικότητας), κάθε κόμβος ή κρίκος μπορεί να έχει πολλές διαφορετικές μορφές. Πιο συγκεκριμένα μπορεί να τεντωθεί και να συμπιεστεί οποιοδήποτε τμήμα του, ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση στον χώρο, δίχως όμως να κοπεί και να ξανακολληθεί κανένα σημείο του. Φυσιολογική απόρροια του τελευταίου είναι ότι ενδέχεται φαινομενικά να έχουμε δύο διαφορετικούς κόμβους ή κρίκους, όμως στην πραγματικότητα να είναι ο ίδιος. Αυτοί λοιπόν οι φαινομενικά διαφορετικοί κόμβοι ή κρίκοι θα ονομάζονται “ισοδύναμοι”. Από αυτό το σημείο κι έπειτα με τον όρο κόμβο θα εννοούμε και τους κρίκους.

Για την μελέτη των κόμβων είναι βολικό να χρησιμοποιούμε την κάθετη προβολή τους σ' ένα επίπεδο. Για να μην υπάρξει σύγχυση για την απεικόνιση του κόμβου στο επιλεγόμενο επίπεδο προβολής θα πρέπει να λάβουμε σοβαρά υπ' όψιν μας τα ακόλουθα:

(1) Οι εφαπτόμενες ευθείες σε όλα τα σημεία του κόμβου θα πρέπει να προβάλλονται

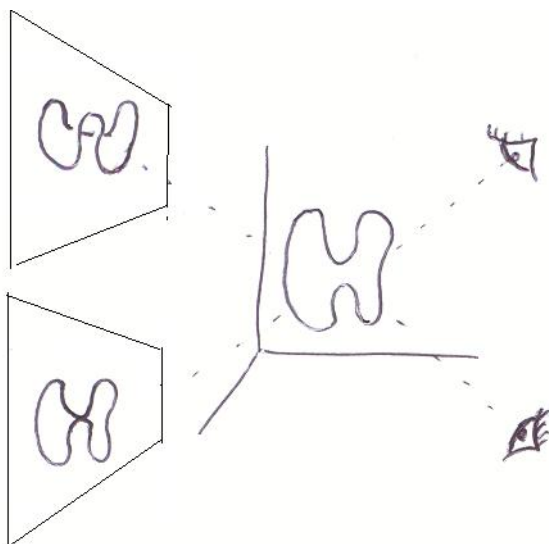
πάνω σε ευθείες του επιπέδου προβολής (δηλαδή οι προβολές των εφαπτομένων δεν εκφυλίζονται ποτέ σε σημείο),

- (2) Δεν πρέπει παραπάνω απο δύο διαφορετικά σημεία του κόμβου να προβάλλονται σε ένα και μοναδικό σημείο του επιπέδου,
- (3) Δύο διαφορετικά σημεία του κόμβου μπορούν να προβληθούν στο ίδιο σημείο του επιπέδου μόνον εάν οι προβολές των δύο εφαπτομένων δεν συμπίπτουν, και
- (4) Το σύνολο των σημείων διασταύρωσης τα λεγόμενα “*crossings*” (στα οποία προβάλλονται δύο και μοναδικά σημεία) είναι πεπερασμένο.

Οι προβολές κόμβων που ικανοποιούν τις παραπάνω συνθήκες θα λέγονται *διαγράμματα*.

Παρατήρηση

Πάντα μπορεί να βρεθεί κατάλληλο επίπεδο προβολής του κόμβου έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες (1),(2),(3) και (4). Έστω λοιπόν ότι στο αρχικό επίπεδο προβολής που έχω επιλέξει παρουσιάζονται κάποιες απαγορευμένες καταστάσεις. Τότε με κατάλληλες μικρές στρέψεις του επιπέδου πεπερασμένες το πλήθος (δες σχήμα 1.1), μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ικανοποίηση των τεσσάρων αυτών συνθηκών. Πράγματι, κάθε φορά που διορθώνουμε κάποια απαγορευμένη κατάσταση φροντίζουμε συγχρόνως να διατηρούμε τις μη προβληματικές και τις ήδη διορθωμένες.



Σχήμα 1.1: Επιλογή κατάλληλου επιπέδου προβολής.

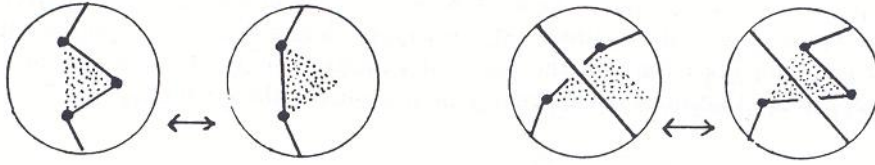
Ακολούθως δίδεται ο μαθηματικός ορισμός της ισοδυναμίας των κόμβων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 Δύο λείοι κόμβοι K_0 και K_1 ονομάζονται *ισοδύναμοι* ή *ισοτοπικοί* αν υπάρχει μια μονοπαραμετρική οικογένεια αμφιδιαφορίσιμων απεικονίσεων, $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$, λείως εξαρτώμενη από την παράμετρο t , $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$, που αντιστοιχεί τον κόμβο K_0 στον κόμβο K_1 δηλαδή τέτοια ώστε f_0 να είναι η ταυτοτική στον K_0 και $f_1(K_0) = K_1$ (λείως εξαρτώμενη σημαίνει ότι η απεικόνιση $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ που δίνεται από το $(x, t) \mapsto f_t(x)$ είναι διαφορίσιμη). Η οικογένεια των αμφιδιαφορίσιμων f_t λέμε ότι είναι μία *ισοτοπία* των κόμβων K_0 και K_1 .

Παρατήρηση

Μπορεί ναδειχθεί ότι δύο ισοτοπικοί κόμβοι με κοινό τμήμα μπορούν να ισοτοπηθούν ο ένας στον άλλον από μια ισοτοπία η οποία δεν κινεί σημεία αυτού του τμήματος.

Κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου θα ονομάζονται μόνο οι κινήσεις της μορφής:



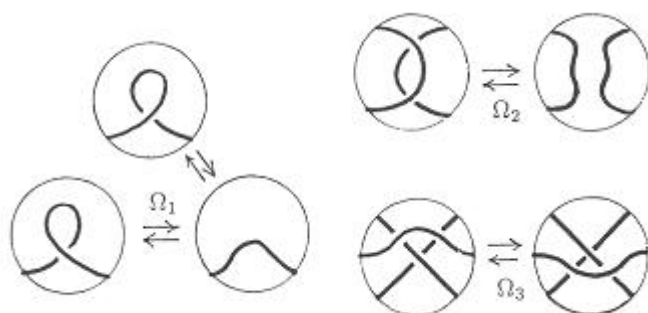
Σχήμα 1.2: Κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου.

Οι κινήσεις αυτές έχουν το χαρακτηριστικό ότι διατηρούν τα ήδη υπάρχοντα σημεία διασταύρωσης και επιπλέον δεν δημιουργούν κανένα καινούργιο.

Έτσι, εύκολα κανείς μπορεί να καταλάβει ότι εάν έχουμε έναν δεδομένο κόμβο στον \mathbb{R}^3 τότε ανάλογα σε ποιό επίπεδο τον προβάλλουμε θα παίρνουμε κατά πάσα πιθανότητα και διαφορετικό διάγραμμα αυτού (όπου θα υπάρχει ενδεχομένως και διαφορά στον αριθμό των διασταυρώσεων). Συνεπώς οι κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου που μόλις αναφέραμε, δεν αρκούν για την πλήρη περιγραφή στο επίπεδο των κινήσεων ισοτοπίας του χώρου. Έτσι μπορούμε να υποψιαστούμε ότι πρέπει να υπάρχουν κάποιες επιπλέον κινήσεις, οι οποίες μετατρέπουν την μια προβολή του κόμβου στην άλλη. Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν τρεις τέτοιες κινήσεις, οι λεγόμενες *κινήσεις Reidemeister* (βλέπε Σχ.1.3).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 (*Θεώρημα Reidemeister*) Δύο διαγράμματα κόμβων αντιστοιχούν σε ισοτοπικούς κόμβους αν και μόνο αν το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο από πεπερασμένη ακολουθία κινήσεων *Reidemeister* και ισοτοπιών επιπέδου.

Η απόδειξη παραλείπεται (δες [PS]).



Σχήμα 1.3: Κινήσεις Reidemeister.

1.1.2 Αναλλοίωτες Κόμβων

Στο πρόβλημα της ταξινόμησης των κόμβων σημαντικό ρόλο παίζει η κατασκευή αναλλοίωτων κόμβων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2 Μια συνάρτηση $I: \{\text{κόμβοι}\} \rightarrow \mathcal{L}$ (όπου \mathcal{L} μπορεί να είναι σύμβολα, αριθμοί, πολυώνυμα *Laurent* κλπ), λέγεται **αναλλοίωτη κόμβων**, εάν:

- $K_1 \sim K_2 \Rightarrow I(K_1) = I(K_2)$. Δηλαδή, μια αναλλοίωτη κόμβων είναι καλά ορισμένη πάνω σε κλάσεις ισοτοπίας κόμβων. Ισοδύναμα για την I έχουμε:
- αν $I(K_1) \neq I(K_2) \Rightarrow K_1 \not\sim K_2$.

Αν όμως $I(K_1) = I(K_2)$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3 Έστω I μια αναλλοίωτη κόμβων και έστω ότι ισχύει: $K_1 \not\sim K_2 \Rightarrow I(K_1) \neq I(K_2)$. Τότε η I θα λέγεται **πλήρης αναλλοίωτη**.

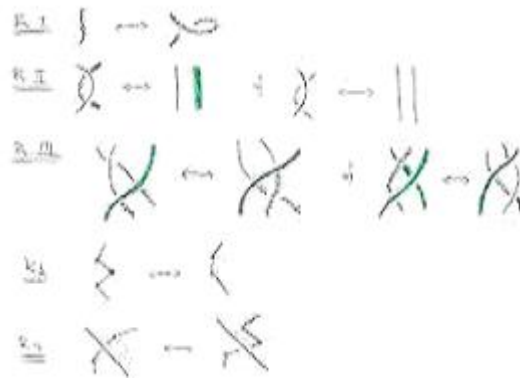
Στόχος της Θεωρίας κόμβων είναι η κατασκευή μιας πλήρους αναλλοίωτης. Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της αναλλοίωτης, δίνουμε ένα απλό παράδειγμα.

Παράδειγμα

Τριχρωματισμός: Ένας κόμβος λέγεται **τριχρωματιστός** αν μπορεί να χρωματιστεί με τρία διαφορετικά χρώματα, ένα για κάθε τόξο (δηλαδή για κάθε συνεκτική συνιστώσα του αντίστοιχου διαγράμματος) έτσι ώστε σε κάθε διασταύρωση να συναντώνται και τα τρία χρώματα ή μόνο το ένα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1 Η τριχρωματισσιμότητα είναι αναλλοίωτη κόμβων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Πράγματι, η τριχρωματισσιμότητα είναι μία αναλλοίωτη κόμβων, διότι δεν επηρεάζεται από τις τρεις κινήσεις *Reidemeister* και τις κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου (βλέπε Σχ.1.4).

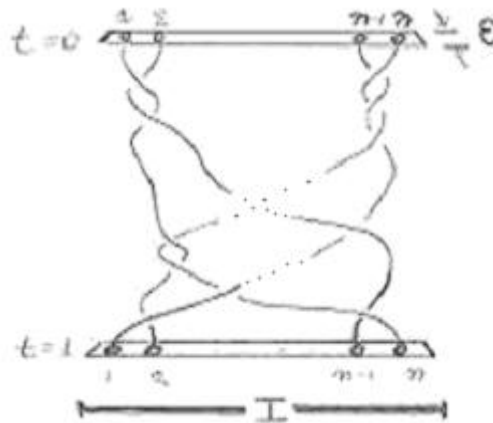


Σχήμα 1.4: Οι βασικές κινήσεις ισοτοπίας δεν επηρεάζουν την τριχρωματισμότητα.

1.2 Κοτσίδες

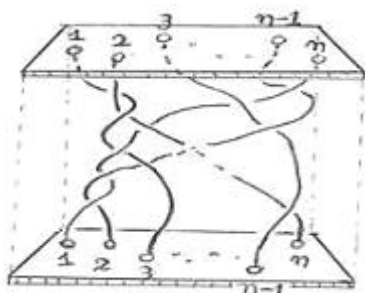
1.2.1 Η Ομάδα των Κοτσίδων

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4 Μια κοτσίδα με n κλωστές, είναι μια εμφύτευση n τόξων, στο $(I \times \epsilon) \times [0, 1]$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$, $\epsilon = [0, \epsilon]$ με $\epsilon > 0$ και πολύ μικρό, έτσι ώστε στο $(I \times \epsilon) \times \{0\}$ να βρίσκονται συνευθειακά τα n πάνω σύνορα των τόξων, στο $(I \times \epsilon) \times \{1\}$ να βρίσκονται συνευθειακά τα n κάτω σύνορα των τόξων και η εμφύτευση να μην έχει τοπικά ακρότατα (βλέπε Σχ.1.5). Τα τόξα θεωρούμε ότι έχουν προσανατολισμό, με κατεύθυνση από πάνω $((I \times \epsilon) \times \{0\})$ προς τα κάτω $((I \times \epsilon) \times \{1\})$.



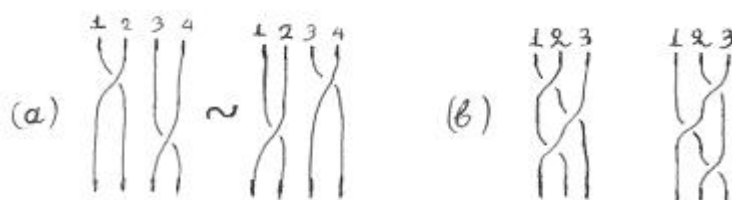
Σχήμα 1.5: Απεικόνιση κοτσίδας.

Έτσι μιλώντας για κοτσίδες, δεν ενδιαφερόμαστε απλώς για την αντιστοιχία των n σημείων του πάνω επιπέδου στα n σημεία του κάτω επιπέδου, αλλά ενδιαφερόμαστε και

Σχήμα 1.6: Κοτσίδα με n κλωστές.

για το τί γίνεται ενδιάμεσα καθ' όλο το μήκος των κλωστών (δηλαδή, ποιά κλωστή περνάει πάνω από ποιά, πόσες φορές και με ποιά σειρά). Επομένως βλέπουμε ότι οι κοτσίδες είναι κάτι πολύ παραπάνω από μεταθέσεις. Μια μετάθεση n στοιχείων μπορούμε να την φανταστούμε σαν την αντιστοιχία (χωρίς να μας ενδιαφέρει τί γίνεται ενδιάμεσα) των n σημεία του πάνω επιπέδου μιας κοτσίδας, στα αντίστοιχα n του κάτω επιπέδου.

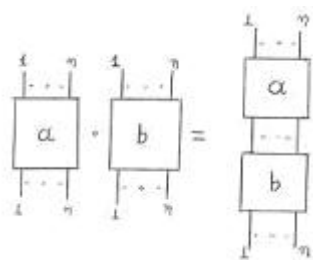
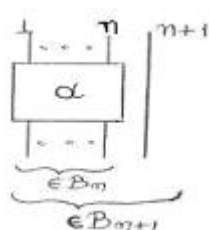
Διαισθητικά, εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι βάσει του πιο πάνω γεωμετρικού ορισμού, υπάρχουν περιπτώσεις όπου κάποιες κοτσίδες ενδέχεται να διαφέρουν μεταξύ τους, αλλά στην πραγματικότητα να είναι ισοδύναμες μέσω ισοτοπιών που σέβονται τον ορισμό της κοτσίδας (βλέπε π.χ. Σχ.1.7).



Σχήμα 1.7: Ισοτοπίες κοτσίδων.

Θεωρούμε το σύνολο B_n που παράγεται από κλάσεις ισοδυναμίας κοτσίδων με n κλωστές, με προφανή πράξη την σύνθεση κοτσίδων (βλέπε Σχ. 1.8). Ας σημειωθεί ότι η πράξη αυτή δεν είναι αντιμεταθετική. Το ουδέτερο στοιχείο ως προς την σύνθεση κοτσίδων είναι η ταυτοτική κοτσίδα με n κλωστές (βλέπε Σχ. 1.12). Αποδεικνύεται εύκολα ότι το B_n είναι ομάδα, η ομάδα των κοτσίδων με n κλωστές.

Ο Ορισμός 1.4, επάγει με προφανή τρόπο την εμφύτευση της B_n στην B_{n+1} όπως δείχνει το Σχήμα 1.9.

Σχήμα 1.8: Η πράξη “ \cdot ” της ομάδας B_n .Σχήμα 1.9: Εμφύτευση της B_n στην B_{n+1} .

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2 Κάθε κοτσίδα σ , μπορεί να διαμεριστεί σε οριζόντιες λωρίδες, έτσι ώστε η κάθε μία να περιέχει μόνο μία διασταύρωση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για τρεις γειτονικές κλωστές το συμπέρασμα ισχύει βάσει του ορισμού των κοτσίδων. Για μη γειτονικές κλωστές διαταράσσουμε - αν χρειαστεί - (στην περίπτωση που δύο διασταυρώσεις είναι ακριβώς στο ίδιο ύψος) μία από τις τέσσερις κλωστές, με τέτοιο τρόπο ώστε να χαμηλώσουμε ή να υψώσουμε την μία από τις δύο διασταυρώσεις σε σχέση με την άλλη. Κάνοντας αυτή την διαδικασία όσες φορές χρειαστεί, ξεκινώντας χ.β.τ.γ. από την τέταρτη κλωστή και προχωρώντας διαδοχικά, δίχως να χαλάμε τις προηγούμενες διασταυρώσεις, προς την n -οστή κλωστή, αποδεικνύεται το ζητούμενο. \square

Παρατήρηση: Βάσει των παραπάνω, μια φυσιολογική επιλογή γεννητόρων της ομάδας B_n , είναι αυτή των στοιχείων

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1},$$

όπου σ_i είναι μια κοτσίδα με n κλωστές, όπου η i -κλωστή καταλήγει στο $i+1$ σημείο του κάτω επιπέδου, και η $(i+1)$ -κλωστή στο i σημείο του κάτω επιπέδου, περνώντας πάνω από την i -κλωστή. Παράλληλα, οι υπόλοιπες κλωστές παραμένουν ταυτοτικές. Έτσι ο γεννήτορας σ_i έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\sigma_i := \left[\begin{array}{cccc} & & & \eta \\ & & & \\ \dots & \dots & & \dots \\ & & \bigvee & \\ & & & \dots \\ & & & \dots \\ & & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \end{array} \right] \in \mathcal{B}_\eta$$

Σχήμα 1.10: Ο γεννήτορας σ_i .

Από τον ορισμό του ουδέτερου στοιχείου, το στοιχείο σ_i^{-1} ορίζεται να είναι η διασταύρωση μεταξύ i και $i+1$ κλωστής, όπου όμως η αριστερή κλωστή περνάει πάνω από την δεξιά, (βλέπε Σχ.1.11).

Εύκολα μπορεί κανείς να πεισθεί ότι τα σ_i , για $i = 1, \dots, n-1$, ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad (1.1)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2. \quad (1.2)$$

Αποδεικνύεται¹ ότι οι σχέσεις (1.1) και (1.2) δίνουν την παράσταση της ομάδας B_n . Έτσι δύο κοτσίδες συνδέονται μεταξύ τους με μια σχέση, αν και μόνο αν, η μία προκύπτει από την άλλη με την διαδοχική εφαρμογή των σχέσεων (2.1) και (2.2), (προφανώς και των σχέσεων $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1$). Άρα, έχουμε την παρακάτω πρόταση την οποία θα θεωρούμε ως τον αλγεβρικό ορισμό για την ομάδα B_n .

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3 Η ομάδα των κοτσίδων με n κλωστές (B_n, \cdot) , έχει την εξής παράσταση:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2. \end{array} \right\rangle \quad (1.3)$$

όπου “ \cdot ” η πράξη της ομάδας, όπως ορίστηκε γεωμετρικά στο Σχ.1.8.

Παρατηρήσεις

(1) Προφανώς η ομάδα των κοτσίδων $(B_n, \forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\})$ είναι άπειρη. Πράγματι, αρκεί κανείς να σκεφτεί ότι παίρνοντας μόνο ένα της στοιχεία, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας (χ.β.τ.γ). το σ_1 , τότε αυτό παράγει το σύνολο: $\{\sigma_1^\nu \mid \nu \in \mathbb{N}^*\}$, το οποίο είναι άπειρο υποσύνολο της B_n .

(2) Οι σχέσεις (1.1) και (1.2) μαζί με τις σχέσεις $\sigma_i^{-1} \sigma_i = 1$, αντανakλούν τις βασικές ισοτοπίες μεταξύ των κοτσίδων.

¹Αποδείχθηκε από τον E. Artin...[άρθρο;;;].

$$\sigma_i^{-1} := \left[\begin{array}{c} 1 \quad i \quad i+1 \quad \eta \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ i-1 \quad i \quad i+1 \end{array} \right] \in \mathcal{B}_\eta$$

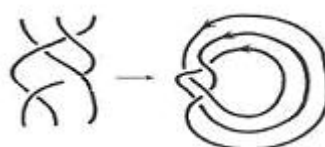
Σχήμα 1.11: Το στοιχείο - γεννήτορας - σ_i^{-1} .

$$e := \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad \eta-1 \quad \eta \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \eta-2 \quad \eta-1 \quad \eta \end{array} \right] \in \mathcal{B}_\eta$$

Σχήμα 1.12: Το ουδέτερο στοιχείο e .

1.2.2 Συσχετισμός Κόμβων και Κοτσίδων

Από νωρίς είχε παρατηρηθεί ότι κλείνοντας μια κοτσίδα προκύπτει ένας προσανατολισμένος κόμβος. Συγκεκριμένα, δεδομένης μιας κοτσίδας $\alpha \in \mathcal{B}_n$, εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν προσανατολισμένο κόμβο $\hat{\alpha}$, που θα ονομάζεται **το κλείσιμο της α** , ενώνοντας τα αντίστοιχα άκρα με απλά τόξα, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



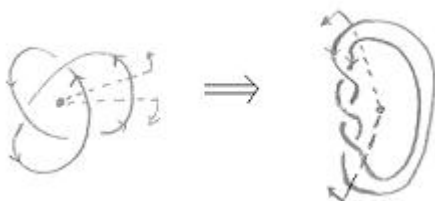
Σχήμα 1.13: Το κλείσιμο κοτσίδας είναι κόμβος.

Αυτή η παρατήρηση ώθησε μεγάλους μαθηματικούς όπως ο *Alexander* και ο *Markov*, να συμβάλουν καθοριστικά στην ανάπτυξη της θεωρίας κόμβων. Έτσι έχουμε τα ακόλουθα θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2 (*Alexander 1923*) Κάθε προσανατολισμένος κόμβος (ή κρίκος), μπορεί να ισοτιπηθεί στο κλείσιμο μιας κοτσίδας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η απόδειξη που έδωσε ο *Alexander* είναι κατασκευαστική και θα παρουσιάσουμε την κύρια ιδέα της. Εξ' ορισμού μια (κλασική) κοτσίδα περιστρέφεται κατά φορά

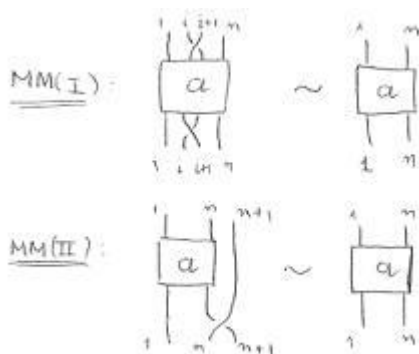
θετική γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδο του διαγράμματός της. Η βασική ιδέα της απόδειξης του *Alexander* είναι η εξής: υποδιαιρώντας με σημεία, χωρίζουμε το διάγραμμα του κόμβου σε τόξα που έχουν είτε θετική φορά είτε αρνητική. Αυτά με θετική φορά παραμένουν στην θέση τους ενώ αυτά με αρνητική φορά τα ισοτοπούμε από την άλλη πλευρά του άξονα της τελικής κοτσίδας, έτσι ώστε να έχουν θετική φορά. \square



Σχήμα 1.14: Ισοτοπία του *trefoil* σε κλειστή κοτσίδα.

Όμως για να χρησιμοποιηθούν οι κοτσίδες για την μελέτη των κόμβων υπάρχει το ακόλουθο σοβαρό πρόβλημα: Η αναπαράσταση ενός κόμβου \mathcal{L} ως το κλείσιμο μιας κοτσίδας δεν είναι μοναδική. Ευτυχώς, μετά από λίγα χρόνια ο *A.A.Markov* βρήκε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για δύο κοτσίδες $\alpha \in B_n$ και $\beta \in B_m$, ώστε να έχουν ισοτοπικά κλεισίματα. Αυτές οι συνθήκες (δύο το πλήθος) έχουν μείνει με τον όρο “κινήσεις *Markov*” και είναι οι ακόλουθες:

- τύπου **I**: $B_n \ni \alpha \sim \sigma_i \alpha \sigma_i^{-1} \in B_n, \forall \sigma_i \in B_n,$
- τύπου **II**: $B_n \ni \alpha \sim \alpha \sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}.$



Σχήμα 1.15: Κινήσεις *Markov*.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 (*Markov, 1935*) Δύο κοτσίδες $\alpha \in B_n$ και $\beta \in B_m$ έχουν ισοτοπικά κλεισίματα, αν και μόνο αν υπάρχει μία πεπερασμένη ακολουθία από κινήσεις *Markov* τύπου *I* και τύπου *II*, που οδηγούν την α στη β .

Η απόδειξη παραλείπεται.

ΣΧΟΛΙΑ: (1) Η απόδειξη του αντιστρόφου του Θεωρήματος *Markov* είναι προφανής, παίρνοντας τα κλεισίματα των κοτσίδων των δύο κινήσεων *Markov*.

(2) Η διμελής σχέση “ \sim ” είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$.

(3) Δυστυχώς, το Θεώρημα *Markov*, δεν είναι εύκολο να εφαρμοστεί απ’ ευθείας, διότι οι ακολουθίες των κινήσεων μπορεί να είναι μεγάλες και να πηγαίνουν σε πολλές διαφορετικές ομάδες κοτσίδων.

Στην επόμενη παράγραφο δίνουμε την πρώτη επιτυχή κατασκευή αναλλοίωτης κόμβων με εφαρμογή του Θεωρήματος *Markov* (του πολυωνύμου *Jones*), που έγινε από τον *V.F.R. Jones* το 1984.

1.3 Το Πολυώνυμο *Jones* 2-μεταβλητών ή *HOMFLYPT*

1.3.1 Άλγεβρες *Hecke* \mathcal{A}

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5 Η άλγεβρα *Hecke* \mathcal{A} , $H(q, n)$, είναι μια άλγεβρα πάνω στο \mathbb{C} , με γεννήτορες τα στοιχεία g_1, g_2, \dots, g_{n-1} , τα οποία ικανοποιούν τις σχέσεις,

$$g_i^2 = (q - 1)g_i + q1, \quad (1.4)$$

$$g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad (1.5)$$

$$g_i g_j = g_j g_i, \quad |i - j| \geq 2. \quad (1.6)$$

δηλαδή,

$$H(q, n) = \left\langle g_1, g_2, \dots, g_{n-1} \left| \begin{array}{l} g_i^2 = (q - 1)g_i + q1, \\ g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \\ g_i g_j = g_j g_i, \quad |i - j| \geq 2. \end{array} \right. \right\rangle \quad (1.7)$$

όπου $q \in \mathbb{C}$, μη μηδενικό.

Είναι προφανές ότι η άλγεβρα *Hecke* $H(q, n)$ είναι ισομορφική με την άλγεβρα πηλίκο \mathcal{CB}_n/V , όπου $V := \langle \sigma_i^2 + (1 - q)\sigma_i + (-q)1 \rangle$, το ιδεώδες που παράγεται από την επιβολή της τετραγωνικής σχέσης. Αυτό φαίνεται από το ότι υπάρχει προφανής επιμορφισμός της \mathcal{CB}_n στην $H(q, n)$ (αντιστοιχίζοντας το σ_i στο g_i).

Ας θυμηθούμε τώρα, ότι η ομάδα μεταθέσεων S_n παρίσταται από τα s_1, s_2, \dots, s_{n-1} , έτσι ώστε $s_i^2 = 1$, $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$, $s_i s_j = s_j s_i$, $\forall |i - j| \geq 2$. Ονομάζουμε μειωμένες λέξεις των g_i και των s_i τις λέξεις με το μικρότερο μήκος. Το θέμα είναι ότι η σχέση (1.4) είναι το ίδιο καλή, όσο και η $s_i^2 = 1$ για να φέρουμε μια λέξη σε μια ισοδύναμη μειωμένη [*Jon*]. Έτσι, το σύστημα των μειωμένων λέξεων των s_i της S_n είναι ικανό να εφοδιάσει την $H(q, n)$ με μια (γραμμική) βάση, απλώς γράφοντας όπου s_i το g_i . Μια χρήσιμη τέτοια βάση είναι η εξής:

$$\{(g_{i_1}g_{i_1-1}\cdots g_{i_1-k_1})\cdots(g_{i_p}\cdots g_{i_p-k_p}) \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n-1\}, \quad (1.8)$$

η οποία ονομάζεται κανονική βάση της $H(q, n)$.

Από την παραπάνω βάση μπορεί να δει κανείς ότι η διάσταση της $H(q, n)$ ως γραμμικός χώρος, είναι $n!$. Παρατηρήστε ακόμα ότι η $H(1, n)$, είναι η \mathcal{CS}_n .

Παρατηρήσεις

- (1) Κάθε λέξη της βάσης της $H(q, n+1)$, περιέχει το στοιχείο g_n , το πολύ μία φορά.
- (2) Η άλγεβρα *Hecke* τύπου A_{n-1} αντιστοιχεί στο γράφημα *Coxeter* τύπου A_{n-1} . Υπάρχουν επίσης άλγεβρες *Hecke* και για τα υπόλοιπα γραφήματα *Coxeter* (βλέπε Κεφάλαιο 2).

1.3.2 Η Συνάρτηση Ίχνους του Ocneanu

Η συνάρτηση ίχνους του *Ocneanu* πάνω στην $H(q, n)$, εμπνεύστηκε από το πολυώνυμο *Jones* μιάς μεταβλητής, που κατασκεύασε ο ίδιος ο *Jones*, μέσω της θεωρίας των Αλγεβρών *von Neumann*[...]. Το θεώρημα του *Ocneanu* είναι το βασικό αποτέλεσμα για την κατασκευή του πολυωνύμου *Jones* δύο μεταβλητών.

Όταν αναφερόμαστε σε μία συνάρτηση ίχνους tr , πάνω σε μια άλγεβρα αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) $tr(\alpha + \beta) = tr(\alpha) + tr(\beta)$,
- (ii) $tr(\lambda\alpha) = \lambda tr(\alpha)$,
- (iii) $tr(\alpha\beta) = tr(\beta\alpha)$.

δηλαδή η συνάρτηση ίχνους είναι πάντα γραμμική και έχει την κύρια ιδιότητα του ίχνους πινάκων.

Ακολούθως θα παρουσιάσουμε το θεώρημα του *Ocneanu* και την απόδειξή του, όπως την είδε από τη σκοπιά του ο *Jones*. Σε αυτό το σημείο κάνουμε την παραδοχή ότι με H_n θα συμβολίζουμε την $H_{q,n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4 (*Ocneanu, 1984*) *Γιά κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχει μια γραμμική συνάρτηση $tr : \cup_{n=1}^{\infty} H(q, n) \rightarrow \mathbb{C}$ μοναδικά ορισμένη από τους κανόνες:*

- 1) $tr(ab) = tr(ba)$, $\forall a, b \in H(q, n)$
- 2) $tr(1) = 1$,
- 3) $tr(xg_n) = z tr(x)$, $\forall x \in H(q, n)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε είναι ότι η συνάρτηση

$$\mathcal{C} : H_n \oplus (H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n) \rightarrow H_{n+1}$$

η οποία δίνεται από τον τύπο $\mathcal{C}(x \oplus y_1 \otimes y_2) = x + y_1 g_n y_2$, είναι ισομορφισμός ανάμεσα σε (H_n, H_n) - διπρότυπα. Αυτό προκύπτει από την εξέταση του συνόλου (2.5) και με το να παρατηρήσει κανείς ότι κάθε λέξη της $H(q, n+1)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων (λέξεων) της βάσης (2.5), όπου το g_n , εμφανίζεται το πολύ μία φορά. Το ότι είναι επί είναι άμεσο και το ότι είναι 1-1 προκύπτει από τον υπολογισμό των διαστάσεων.

Τώρα είμαστε ελεύθεροι να ορίσουμε τη γραμμική συνάρτηση επαγωγικά από τους τύπους $tr(1) = 1$ και $tr(xg_n y) = z tr(xy) \quad \forall x, y \in H(q, n)$. Μένει να δείξουμε την ιδιότητα 1. Από υπόθεση επαγωγής μπορούμε να το υποθέσουμε για $a, b \in H_n$. Τώρα αν S είναι ένα υποσύνολο μιας άλγεβρας A , το οποίο την παράγει σαν άλγεβρα (το S είναι ένα σύνολο γεννητόρων της A), τότε για να δείξουμε ότι η γραμμική συνάρτηση είναι συνάρτηση ίχνους, αρκεί να δείξουμε ότι $f(xs) = f(sx)$, $\forall s \in S$ και $x \in A$. Εφαρμόζοντας αυτό και βάζοντας όπου $S = H_n \cup \{g_n\}$, βλέπουμε ότι η μόνη μη τετριμμένη περίπτωση που προκύπτει από τον ορισμό του tr , είναι η $tr(g_n x g_n y) = tr(x g_n y g_n)$, $\forall x, y \in H_n$. Αλλά, από την παρατήρηση στην αρχή της απόδειξης, αρκεί να εξετάσουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

- $x \in H_{n-1}, y \in H_{n-1}$,
- $x = a g_{n-1} b, a, b \in H_{n-1}$ και $y \in H_{n-1}$,
- όμοια με την περίπτωση b) με τη διαφορά ότι οι ρόλοι των x και y είναι αντεστραμμένοι,
- $x = a g_{n-1} b, y = c g_{n-1} d, a, b, c, d \in H_{n-1}$.

Η περίπτωση a) είναι τετριμμένη, καθώς το g_n αντιμετωπίζεται με την H_{n-1} . Έτσι αυτό που χρειάζεται να εξετάσουμε είναι μόνο τις περιπτώσεις b) και d). Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} b) \quad tr(g_n a g_{n-1} b g_n y) &= tr(a g_n g_{n-1} b y) \\ &= tr(a g_{n-1} g_n g_{n-1} b y) \\ &= z tr(a g_{n-1}^2 b y) \\ &= (q-1) z tr(a g_{n-1} b y) + q z tr(a b y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και} \quad tr(a g_{n-1} b g_n y g_n) &= tr(a g_{n-1} b g_n^2 y) \\ &= (q-1) tr(a g_{n-1} b g_n y) + q tr(a g_{n-1} b y) \\ &= z(q-1) tr(a g_{n-1} b y) + q z tr(a b y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad tr(g_n a g_{n-1} b g_n c g_{n-1} d) &= z tr(a g_{n-1}^2 b c g_{n-1} d) \\ &= z(q-1) tr(a g_{n-1} b c g_{n-1} d) + z^2 q tr(a b y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{και} \quad tr(a g_{n-1} b g_n c g_{n-1} d g_n) &= z tr(a g_{n-1} b g_n^2 c d) \\ &= z(q-1) tr(a g_{n-1} b g_{n-1} c d) + z^2 tr(a b c d). \end{aligned}$$

ο.ε.δ.

Είναι προφανές από την απόδειξη ότι οι ιδιότητες 1), 2), και 3) αρκούν για να υπολογίσουμε επαγωγικά το ίχνος οποιουδήποτε στοιχείου της $H(q, n)$. Ας υπολογίσουμε

για παράδειγμα το ίχνος της λέξης $g_2g_1g_3g_2$, η οποία έχει ελάχιστο μήκος στην ομάδα των κοτσίδων:

$$\begin{aligned}
tr(g_2g_1g_3g_2) &= tr(g_2^2g_1g_3) && \text{(ιδιότητα 1)} \\
&= z tr(g_2^2g_1) && \text{(ιδιότητα 3)} \\
&= z(q-1)tr(g_2g_1) + zq tr(g_1) \\
&= (z^2(q-1) + zq)tr(g_1) \\
&= z^3(q-1) + z^2q && \text{(ιδιότητα 1 και 3)}.
\end{aligned}$$

Προκειμένου να κατασκευαστεί μια αναλλοίωτη κόμβων χρησιμοποιώντας το ίχνος $Oscneanu$, η παρατήρηση κλειδί είναι η ομοιότητα μεταξύ της συνθήκης 3) του Θεωρήματος 1.4 και της δεύτερης κίνησης *Markov*. Έτσι προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6 (*Ίχνος Markov*) Έστω $z \in \mathbb{C}$, $H := \cup_{n=1}^{\infty} H(q, n)$ και $\tau : H \rightarrow \mathbb{C}$ μια \mathbb{C} -γραμμική απεικόνιση. Τότε η τ θα ονομάζεται ίχνος *Markov* (με παράμετρο z) αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

(1) τ είναι συνάρτηση ίχνους της H .

(2) $\tau(1) = 1$ (κανονικοποίηση).

(3) $\tau(hg_n) = z\tau(h) \forall n \geq 1$ και $h \in H_n$.

Παρατήρηση: (1) Παρατηρούμε ότι οι γεννήτορες g_i (για $i = 1, 2, \dots$) είναι συζυγείς στην H (εύκολο). Έτσι κάθε συνάρτηση ίχνους του H θα πρέπει να παίρνει την ίδια τιμή για αυτά τα στοιχεία. Το τελευταίο εξηγεί γιατί η παράμετρος z είναι ανεξάρτητη του n στη συνθήκη (3) του Ορισμού 1.6.

(2) Ο ορισμός του ίχνους *Markov* επεκτείνεται και σε άλλες άλγεβρες, π.χ. σε άλγεβρες *Hecke* τύπου \mathcal{B} (όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2) και στην θέση του \mathbb{C} μπορεί να μπει ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος A , με μονάδα.

Ο πιο φυσικός τρόπος για να εξασφαλίσουμε μια αναλλοίωτη κόμβων, είναι να κανονικοποιήσουμε τα g_i έτσι ώστε και οι δύο τύποι της δεύτερης κίνησης *Markov*, να επηρεάζουν την συνάρτηση ίχνους με τον ίδιο τρόπο. Έστω λοιπόν $\theta \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $tr(\theta g_i) = tr((\theta g_i)^{-1})$. Τότε έχουμε :

$$\theta^2 = tr(g_i^{-1})/tr(g_i) = tr(g_i/q - (1 - 1/q))/z = (1 - q + z)/qz := \lambda .$$

Από αυτό προκύπτει ότι $z = (q - 1)/(1 - \lambda q)$. Έτσι $tr(\sqrt{\lambda}g_i) = tr((\sqrt{\lambda}g_i)^{-1})$ και $tr(\sqrt{\lambda}g_i) = z\sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}(1 - q)/(1 - \lambda q)$.

Επιπλέον, αν αναπαραστήσουμε την B_n στην $H(q, n)$ με την π_λ έτσι ώστε, $\pi_\lambda(\sigma_i) = \sqrt{\lambda}g_i \in H(q, n)$, τότε η συνάρτηση των q και λ που δίνεται από την σχέση:

$$(- (1 - \lambda q) / \sqrt{\lambda} (1 - q))^{n-1} tr(\pi_\lambda(\alpha)) , \alpha \in B_n,$$

εξαρτάται μόνο από τον κόμβο $\hat{\alpha}$. Ας σημειωθεί ότι ο συντελεστής $(-(1 - \lambda q)/\sqrt{\lambda}(1 - q))^{n-1}$ προέκυψε από την απαίτηση η αναλλοίωτη που ζητάμε να παίρνει την ίδια τιμή για τις α , $\alpha\sigma_n$ και $\alpha\sigma_n^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Η αναπαράσταση π ($\pi(\sigma_i) = g_i$) έχει το πλεονέκτημα ότι εμπλέκει μόνο την μεταβλητή q . Έτσι έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7 (Πολυώνυμο Jones 2-μεταβλητών) Η αναλλοίωτη δύο μεταβλητών $X_L(q, \lambda)$ ενός προσανατολισμένου κόμβου L είναι η συνάρτηση,

$$X_L(q, \lambda) = \left(-\frac{1 - \lambda q}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^e \text{tr}(\pi(\alpha))$$

όπου $\alpha \in B_n$ είναι οποιαδήποτε κοτσίδα τ.ώ. $\hat{\alpha} = L$, e είναι το εκθετικό άθροισμα του α ως λέξη των σ_i και $\pi : \sigma_i \mapsto g_i$ η αναπαράσταση της B_n στην $H(q, n)$.

1.3.3 Ιδιότητες του Πολυωνύμου Jones 2-μεταβλητών

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4 Για κάθε προσανατολισμένο κόμβο L υπάρχει ένα πολυώνυμο *Laurent* $P_L(t, x)$ δύο μεταβλητών t και x τ.ώ. $P_L(t, x) = X_L(q, \lambda)$ όπου $t = \sqrt{\lambda}\sqrt{q}$ και $x = (\sqrt{q} - 1/\sqrt{q})$. Επιπλέον, το $P_L(t, x)$ είναι μοναδικά ορισμένο από τον “γραφικό κανόνα” (*skein rule*): Αν L_+ , L_- και L_0 είναι κόμβοι οι οποίοι έχουν ταυτόσημες προβολές, εκτός από την περιοχή μίας διασταύρωσης όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1, τότε

$$t^{-1}P_{L_+} - tP_{L_-} = xP_{L_0}$$



Σχήμα 1.16: $t^{-1}P_{L_+} - tP_{L_-} = xP_{L_0}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Θα ξεκινήσουμε εξετάζοντας την συμπεριφορά του X πάνω στα διαγράμματα L_+ , L_- και L_0 (βλέπε Σχ. 1.16). Παρατηρείστε ότι μία τυχαία διασταύρωση του διαγράμματος ενός προσανατολισμένου κόμβου μπορεί να ισοτοπηθεί σε μορφή κοτσίδας, έτσι ώστε η διασταύρωση να γίνει ένας όρος σ_i (ή σ_i^{-1} ανάλογα με το αν είναι θετική ή αρνητική διασταύρωση) στην τελική έκφραση μίας κοτσίδας από τον αρχικό κόμβο. Έτσι, μετά από κινήσεις *Markov* πρώτου τύπου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $L_0 = \widehat{\alpha\sigma_i}$ και $L_+ = \widehat{\alpha\sigma_i^2}$, $L_- = \widehat{\alpha}$ για κάποιο $\alpha \in B_n$. Από την τετραγωνική σχέση έχουμε $\text{tr}(\pi(\alpha\sigma_i^2)) - q \text{tr}(\pi(\alpha)) = (q - 1)\text{tr}(\pi(\alpha\sigma_i))$. Έστω e το εκθετικό άθροισμα του α . Πολλαπλασιάζοντας αυτή την εξίσωση με $T(\sqrt{\lambda})^{e+1}/\sqrt{q}$, όπου

$$T := \left(-(1 - \lambda q)/\sqrt{\lambda}(1 - q) \right)^{n-1}$$

τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{T}{\sqrt{q}\sqrt{\lambda}}(\sqrt{\lambda})^{e+2}tr(\pi(\alpha\sigma_i^2)) - \sqrt{q}\sqrt{\lambda}T(\sqrt{\lambda})^e tr(\pi(\alpha)) \\ &= (\sqrt{q} - 1/\sqrt{q}) T(\sqrt{\lambda})^{e+1}tr(\pi(\alpha\sigma_i)). \end{aligned}$$

Έτσι, από τον ορισμό του X , προκύπτει ότι: $t^{-1}X_{L_+} - tX_{L_-} = xX_{L_0}$. \square

Ιδιότητα 1: Αντιστροφή του προσανατολισμού

Αντιστρέφοντας όλα τα βέλη του προσανατολισμού στο Σχήμα 1.16, τα πρόσημα των συγκεκριμένων διαγραμμάτων στον L_+ και στον L_- δεν αλλάζουν. Έτσι από την Πρόταση 1.4 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $P_L = P_{L'}$, όπου L' είναι ο προσανατολισμένος κόμβος (ή κρίκος) που προκύπτει αν αντιστρέψουμε στον L τον προσανατολισμό όλων των συνιστωσών του. Παρατηρείστε ότι αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό μιας συγκεκριμένης συνιστώσας (και μόνο αυτής) τότε, το P_L μπορεί να αλλάξει δραστικά! Αυτό είναι φυσικό, από την στιγμή που αν αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό μιας συγκεκριμένης συνιστώσας, τότε κάποιες διασταυρώσεις που προέρχονται από δύο διαφορετικές συνιστώσες θα αλλάζουν πρόσημο. Ουσιαστικά οι νέες αυτές διακλαδώσεις που προκύπτουν είναι τα είδωλα των αντίστοιχων αρχικών τους. Αυτά φυσικά έχουν νόημα μόνο στην περίπτωση που έχουμε κόμβο με δύο ή περισσότερες συνιστώσες (βλέπε Σχ. 1.17).



Σχήμα 1.17: Αντιπαράδειγμα.

Το αποτέλεσμα $P_L = P_{L'}$ μπορεί να φανεί και στις άλγεβρες *Hecke* το ίδιο καλά. Η συμμετρία της παράστασης της B_n μέσω των σχέσεων (1.1) και (1.2) υπονοεί την ύπαρξη ενός αντιαυτομορφισμού θ στην B_n ο οποίος στέλνει το σ_i στο σ_{n-i} . Γεωμετρικά ο θ προκύπτει περιστρέφοντας την κοτσίδα α κατά 180° πάνω στο επίπεδό της (και αλλάζοντας τους προσανατολισμούς των κλωστών). Είναι γεωμετρικά προφανές ότι $\theta(\alpha) = (\hat{\alpha})'$. Από τις σχέσεις (1.4), (1.5) και (1.6), ο θ ορίζει επίσης έναν αντιαυτομορφισμό στην $H_n(q)$ ο οποίος διατηρεί το ίχνος (μοναδικότητα του ίχνους *Markov*). Έτσι έχουμε $X_L = X_{L'}$.

ΣΧΟΛΙΟ : Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να νοηθεί σαν αρνητικό αποτέλεσμα του συγκεκριμένου πολυωνύμου, αφού δεν μπορεί να ανιχνεύσει την διαφορά ανάμεσα στους δύο διαφορετικούς προσανατολισμούς του κόμβου.

Ιδιότητα 2: Καθρεπτισμός

Ένα από τα χαρακτηριστικά του P_L είναι ότι είναι πολύ ευαίσθητο στον καθρεπτισμό ενός κόμβου. Πράγματι, έστω L ένας προσανατολισμένος κόμβος, και έστω \tilde{L} ένας άλλος προσανατολισμένος κόμβος, ο οποίος προέκυψε ως το είδωλο του L σε ένα κάτοπτρο παράλληλο στο επίπεδό του, ή ισοδύναμα, αντιστρέφοντας όλες τις διασταυρώσεις του L . Είναι φανερό από το σχήμα 1.16 ότι $P_{\tilde{L}}(t, x) = P_L(t^{-1}, -x)$. Αυτό θα το δείξουμε και χρησιμοποιώντας τις άλγεβρες *Hecke*. Αν και αυτή η μέθοδος είναι λιγότερο εύκολη, είναι αρκετά αποκαλυπτική.

Αν $\alpha \in B_n$ τότε το είδωλο του $\hat{\alpha}$ είναι το $\theta(\alpha^{-1}) \in B_n$ όπου θ ο αντιαυτομορφισμός που ορίστηκε παραπάνω. Αλλά, όπως έχουμε δει, μπορούμε να πάρουμε $\alpha^{-1} \in B_n$. Έτσι εάν $L = \hat{\alpha}$ και e είναι το εκθετικό άθροισμα του α τότε,

$$X_{\tilde{L}}(q, \lambda) = \left(-\frac{1 - \lambda q}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{-e} \text{tr}(\pi(\alpha^{-1})).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5 : $X_{\tilde{L}}(q, \lambda) = X_L(1/q, 1/\lambda)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Έστω $f(q, \lambda) = \text{tr}(\pi(\alpha))$. Γράφουμε το $\pi(\alpha)$ ως γινόμενο, με κάθε g_i να γράφεται $(q+1)e_i - 1$ όπου $e_i = (1 + g_i)/(1 + q)$. Τά e_i ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$e_i^2 = e_i \quad (1.9)$$

$$e_i e_{i+1} e_i - q/(1+q)^2 e_i = e_{i+1} e_i e_{i+1} - q/(1+q)^2 e_{i+1} \quad (1.10)$$

$$e_i e_j = e_j e_i \quad |i - j| \geq 2 \quad (1.11)$$

$$\text{tr}(e_i) = \frac{q(1 - \lambda)}{(1 + q)(1 - \lambda q)}. \quad (1.12)$$

Τότε το $\pi(\alpha^{-1})$ θα έχει την ίδια έκφραση ως προς τα e_i αρκεί το q να αντικατασταθεί από το q^{-1} . Και οι δύο οι εκφράσεις $q/(1+q)^2$ και $q(1-\lambda)/(1+q)(1-\lambda q)$ είναι αναλλοίωτες κάτω από την αλλαγή των μεταβλητών $q \mapsto 1/q$, $\lambda \mapsto 1/\lambda$. Επιπλέον οι σχέσεις (1.4), (1.5) και (1.6) είναι ισοδύναμες, για $q \neq -1$, με τις σχέσεις (1.9), (1.10) και (1.11). Έτσι αρκούν για τον υπολογισμό του ίχνους για κάθε λέξη των e_i , το οποίο θα είναι το άθροισμα δυνάμεων του q επί δυνάμεις του $q(1-\lambda)/(1+q)(1-\lambda q)$. Έτσι $\text{tr}(\pi(\alpha^{-1})) = f(1/q, 1/\lambda)$. Τέλος, η έκφραση $(1-\lambda q)/\sqrt{\lambda}(1-q)$ είναι αναλλοίωτη κάτω από την αλλαγή των μεταβλητών και το $(\sqrt{\lambda})^e$ γίνεται $(\sqrt{\lambda})^{-e}$, το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Κεφάλαιο 2

Κοτσίδες Artin τύπου \mathcal{B} και Ίχνη Markou τύπου \mathcal{B}

2.1 Η Ομάδα των Κοτσίδων τύπου \mathcal{B}

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάσαμε την ομάδα B_n των κοτσίδων τύπου \mathcal{A} . Γεωμετρικά, μια κοτσίδα $\sigma \in B_n$ αποτελείται από n εμφυτευμένα τόξα-κλωστές στην S^3 , όπου τα n άνω άκρα βρίσκονται σε μια ευθεία ϵ_1 , αντίστοιχα τα n κάτω άκρα βρίσκονται σε μια ευθεία ϵ_2 , με $\epsilon_1 // \epsilon_2$. Χαρακτηριστικό των εμφυτεύσεων αυτών είναι ότι έχουν φορά από πάνω προς τα κάτω και ότι έχουν ελευθερία κινήσεων με τον περιορισμό όμως να μην δημιουργούν τοπικά ακρότατα (ως προς τις ευθείες ϵ_1, ϵ_2).

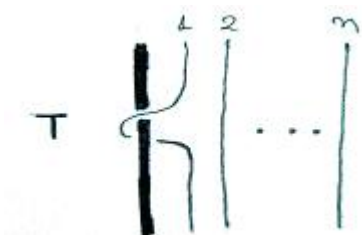
Έστω τώρα μια κοτσίδα με $n + 1$ κλωστές. Αν απαιτήσουμε η πρώτη κλωστή να είναι ταυτοτική (δηλ. τα άκρα της να είναι τα πρώτα κατα την διάταξή τους πάνω στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2), τότε δημιουργείται μια ειδική υποομάδα της ομάδας των κοτσίδων B_{n+1} , η λεγόμενη ομάδα των κοτσίδων Artin τύπου \mathcal{B} που θα συμβολίζεται $B_{1,n}$ (βλέπε Σχ. 2.1). Σε αυτήν την περίπτωση την πρώτη κλωστή δεν την αριθμούμε αλλά αριθμούμε μόνο τις υπόλοιπες κλωστές (n το πλήθος), που αποτελούν το κλασικό (*standard*) μέρος μιας κοτσίδας τύπου \mathcal{B} , με την έννοια ότι αν αφαιρέσουμε την πρώτη κλωστή απομένει μια κλασική κοτσίδα με n κλωστές.

Το σύνολο λοιπόν των κοτσίδων $B_{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$ αποτελεί ομάδα, με πράξη την πράξη της ομάδας B_{n+1}) και γεννήτορες τους συνήθεις γεννήτορες $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, για το κλασικό μέρος, μαζί με τον γεννήτορα Γ όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2.

Από την θεωρία παραστάσεων προκύπτει ότι η $B_{1,n}$ έχει την ακόλουθη παράσταση, βλ. [Lam1]:



Σχήμα 2.1: Μια κοτσίδα Artin τύπου \mathcal{B} .



Σχήμα 2.2: Ο γεννήτορας T της ομάδας $B_{1,n}$.

$$B_{1,n} = \left\langle T, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \left| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \forall i \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, |i-j| > 1 \\ T \sigma_i = \sigma_i T, i > 1 \\ T \sigma_1 T \sigma_1 = \sigma_1 T \sigma_1 T \end{array} \right. \right\rangle$$

ΣΧΟΛΙΟ : Η $B_{1,n}$ εμπεριέχεται με φυσικό τρόπο στην $B_{1,n+1}$ (βλέπε Σχ. 2.3). Ως επακόλουθο το ευθύ όριο $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n}$ είναι καλά ορισμένο.

Σχήμα 2.3: Φυσική εμφύτευση της $B_{1,n}$ στην $B_{1,n+1}$.

2.2 Ένα Ίχνος Markov για Άλγεβρες Hecke τύπου \mathcal{B}

2.2.1 Άλγεβρες Hecke τύπου \mathcal{B}

Ορίζουμε ως **σύστημα Coxeter** ένα ζεύγος (\mathcal{C}, S) αποτελούμενο από μια ομάδα \mathcal{C} και από ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων $S \subseteq \mathcal{C}$, το οποίο υπακούει μόνο σε σχέσεις της μορφής

$$(ss')^{m(s,s')} = 1,$$

όπου $s, s' \in S$ με $s \neq s', m(s, s) = 1, m(s, s') = m(s', s) \geq 2$.

Στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των s και s' , τότε κάνουμε τη σύμβαση ότι $m(s, s') = \infty$. Ας παρατηρήσουμε ότι η σχέση $(ss')^1 = 1 \Leftrightarrow s^2 = 1$ δηλώνει ότι $s^{-1} = s$. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι η ομάδα \mathcal{C} , είναι η ομάδα πηλίκο F/N , όπου η F είναι η ελεύθερη ομάδα που παράγεται από το σύνολο S και N είναι η κανονική υποομάδα που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής

$$(ss')^{m(s,s')}.$$

Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου S ονομάζεται **βαθμός** του (\mathcal{C}, S) .

Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 Μιά ομάδα \mathcal{C} που έχει παράσταση της μορφής

$$\langle s_1, \dots, s_n | (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1, m_{ii} = 1, i = 1, \dots, n \rangle$$

ονομάζεται **ομάδα Coxeter**, όπου με m_{ij} συμβολίζουμε το $m(s_i, s_j)$.

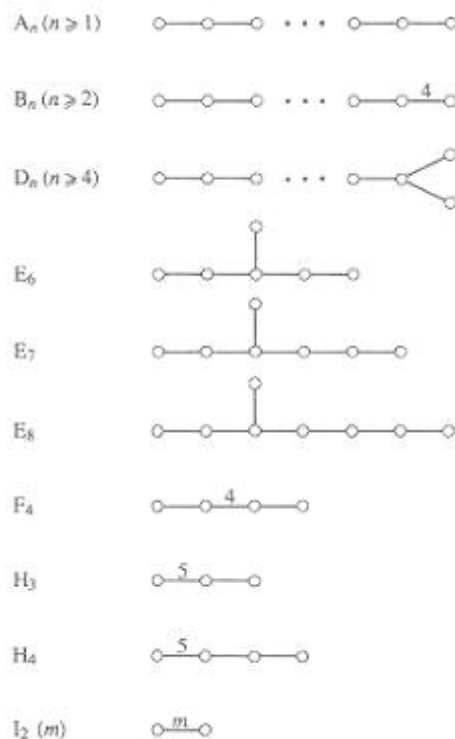
ΣΧΟΛΙΟ : Οι ομάδες Coxeter είναι καλά ορισμένες. Πράγματι, αν πάρουμε μια ομάδα με δύο στοιχεία¹ ($G = \{a, e\}, *$), τότε $a * a = e$ ή, αν βάλουμε όπου $e = 1$, τότε θα έχουμε $a * a = 1$. Ισοδύναμα $(a * a)^1 = 1$ (δηλαδή $m(a, a) = 1$, όπως και απαιτείται).

¹Όπως γνωρίζουμε, όλες οι ομάδες με δύο στοιχεία είναι ισομορφικές.

28 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΚΟΤΣΙΔΕΣ ARTIN ΤΥΠΟΥ B ΚΑΙ ΧΝΗ MARKOV ΤΥΠΟΥ B

Επομένως, μια ομάδα με δύο στοιχεία είναι μια ομάδα *Coxeter*.

Όλες οι πεπερασμένες ομάδες *Coxeter* έχουν ταξινομηθεί. Κάθε τέτοια ομάδα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα γράφημα *Coxeter* (βλέπε Σχ 2.4), όπου η μονή γραμμή που ενώνει δύο γεννήτορες s_i, s_j της ομάδας υποδηλώνει $m_{ij} = 3$ και κάθε επιπλέον γραμμή αύξηση του m_{ij} κατά 1. Όταν δύο γεννήτορες δεν συνδέονται με γραμμή υπονοείται ότι η σχέση τους είναι βαθμού 2, άρα ότι αντιμετατίθενται. Για παράδειγμα η ομάδα μεταθέσεων S_n αντιστοιχεί στο πρώτο γράφημα *Coxeter*.



Σχήμα 2.4: Οι πεπερασμένες ομάδες *Coxeter*.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2 Έστω C μια ομάδα *Coxeter*. Η αντίστοιχη ομάδα *Artin* δίνεται από την παράσταση:

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \underbrace{\sigma_i \sigma_j \sigma_i \dots}_{m_{ij}} = \underbrace{\sigma_j \sigma_i \sigma_j \dots}_{m_{ij}} \right\rangle$$

Για παράδειγμα η γνωστή μας ομάδα κοτσίδων B_n είναι η ομάδα *Artin* της συμμετρικής

ομάδας S_n .

Το δεύτερο γράφημα *Coxeter* αντιπροσωπεύει την ομάδα *Coxeter* τύπου \mathcal{B} της οποίας η παράσταση είναι η ακόλουθη:

$$W_n = \left\langle t, s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \left| \begin{array}{l} (ts_1)^4 = 1 \quad \text{ή} \quad ts_1ts_1 = s_1ts_1t \\ (ts_i)^2 = 1 \quad \text{ή} \quad ts_i = s_it \quad \text{για} \quad i > 1 \\ t^2 = s_i^2 = 1 \quad \text{για} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ (s_i s_{i+1})^3 = 1 \quad \text{ή} \quad s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad i \\ (s_i s_j)^2 = 1 \quad \text{ή} \quad s_i s_j = s_j s_i \quad \text{για} \quad |i-j| > 1 \end{array} \right. \right\rangle.$$

Από το τελευταίο έπεται άμεσα ότι η $B_{1,n}^2$ είναι η ομάδα *Artin* της W_n .

ΣΧΟΛΙΟ : Μια ομάδα *Coxeter* είναι ομάδα-πηλίκο της αντίστοιχης ομάδας *Artin* ως προς την σχέση $s_i^2 = 1$. Η βασική διαφορά των ομάδων *Coxeter* και *Artin* είναι ότι στις δεύτερες σε αντίθεση με τις πρώτες, κανένας γεννήτοράς τους δεν ταυτίζεται με τον αντίστροφό του.

Κάθε ομάδα *Coxeter* σχετίζεται με μια άλγεβρα *Hecke* \mathcal{H} (συνήθως πάνω στο σώμα \mathcal{C}), η παράσταση της οποίας προκύπτει από την παράσταση της αντίστοιχης ομάδας *Artin* που δόθηκε πιο πάνω, προσθέτοντας την τετραγωνική σχέση $\sigma_i^2 = (q_i - 1) \cdot \sigma_i + q_i \cdot 1$, όπου το $q_i \neq 0 \in \mathcal{C}$, είναι μια σταθερή μεταβλητή και βάζοντας όπου $\sigma_i \mapsto g_i$, με $i = 0, 1, \dots, n-1$ και όπου $g_0 = t$. Για παράδειγμα, η άλγεβρα *Hecke* τύπου \mathcal{A} , $\mathcal{H}_n(q)$, που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο σχετίζεται με την συμμετρική ομάδα S_n . Επίσης έχουμε την ακόλουθη παράσταση της άλγεβρας *Hecke* τύπου \mathcal{B}_n , $\mathcal{H}_n(q, Q)$, όπου $q, Q \in \mathcal{C}$, που αντιστοιχεί στην ομάδα W_n :

$$H_n(q, Q) = \left\langle t, g_1, \dots, g_{n-1} \left| \begin{array}{l} tg_1tg_1 = g_1tg_1t \\ tg_i = g_it \quad \text{για} \quad i > 1 \\ t^2 = (Q-1)t + Q \\ g_i^2 = (q-1)g_i + q \quad \text{για} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \quad \text{για} \quad \text{κάθε} \quad i \\ g_i g_j = g_j g_i \quad \text{για} \quad |i-j| > 1 \end{array} \right. \right\rangle.$$

ΣΧΟΛΙΟ : Παρατηρώντας το γράφημα *Coxeter* της W_n συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια φυσική εμφύτευση της W_n στην W_{n+1} (προσθέτοντας έναν επιπλέον κόμβο-γεννήτορα στο τέλος), και αυτό επάγει μια φυσική εμφύτευση της $H_n(q, Q)$ στην $H_{n+1}(q, Q)$. Έτσι το ευθύ όριο $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(q, Q)$ είναι καλά ορισμένο. Από τα παραπάνω έπεται ότι υπάρχει ένας φυσικός επιμορφισμός, $\pi : \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{CB}_{1,n} \mapsto \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(q, Q)$, τέτοιο ώστε $\pi(T) = t$, $\pi(\sigma_i) = g_i$.

²Η $B_{1,n}$ συμβολίζεται και ως \widetilde{W}_n .

2.2.2 Κατασκευή Ίχνους Markou για Άλγεβρες Hecke τύπου Β

Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε μια συνάρτηση ίχνους, από το $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(q, Q)$ στο \mathcal{C} η οποία θα είναι ανάλογη της συνάρτησης ίχνους του Ocneanu και σε κάθε κοτσίδα στο $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n}$ θα αντιστοιχεί ένα μιγαδικό πολυώνυμο. Έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα που προέκυψε από την δουλειά της Σ. Λαμπροπούλου και του M. Geck [Lam1, GeL].

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1 Έστω $z, s \in \mathcal{C}$, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική συνάρτηση

$$tr : \mathcal{H} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(q, Q) \longrightarrow \mathcal{C}$$

τέτοια ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

- 1) $tr(ab) = tr(ba)$, $a, b \in \mathcal{H}$
- 2) $tr(1) = 1$ για κάθε $\mathcal{H}_n(q, Q)$
- 3) $tr(ag_n) = z tr(a)$, $a \in \mathcal{H}_n(q, Q)$
- 4) $tr(at'_n) = s tr(a)$, $a \in \mathcal{H}_n(q, Q)$
όπου $t'_n = g_n \dots g_1 t g_1^{-1} \dots g_n^{-1}$.

Απόδειξη:

Η στρατηγική της απόδειξης [Lam0] βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην απόδειξη της συνάρτησης ίχνους του Ocneanu όπως αυτή δίνεται στο [Jon]. Η απόδειξη ότι το tr είναι καλά ορισμένο βασίζεται στο γεγονός ότι υπάρχει κανονική βάση για την $\mathcal{H}_{n+1}(q, Q)$ τέτοια ώστε τα στοιχεία με τους υψηλότερους δείκτες g_n και t_n να εμφανίζονται το πολύ μία φορά σε κάθε λέξη. Πιο συγκεκριμένα:

Η ομάδα W_n είναι υποομάδα της W_{n+1} με δείκτη $2(n+1)$. Στο [DJ], οι R. Dipper και G.D. James έδειξαν ότι ένα πλήρες σύνολο αντιπροσώπων δεξιών συμπλόκων της W_n στην W_{n+1} είναι το:

$$\mathcal{R}_{n+1} := \{1, s_n \dots s_i \mid i = 1, \dots, n\} \cup \{s_n \dots s_1 s_0 s_1 \dots s_i \mid i = 0, 1, \dots, n \text{ για } s_0 = t\}$$

Έτσι κάθε στοιχείο $w \in W_{n+1}$ μπορεί να γραφεί μοναδικά στην μορφή

$$w \in W_n \text{ ή } w = ux \text{ , όπου } u \in W_n \text{ και } x \in \mathcal{R}_{n+1} .$$

Ισοδύναμα, κάθε στοιχείο $w \in W_{n+1}$ έχει μια από τις ακόλουθες μορφές:

- (a) $w \in W_n$
- (b) $w = us_n v$, $u, v \in W_n$
- (c) $w = us_n \dots s_1 t s_1 \dots s_n$, $u \in W_n$

Ανάλογη κατάσταση έχουμε και στην άλγεβρα Hecke $\mathcal{H}_{n+1}(q, Q)$. Δηλαδή κάθε στοιχείο της $\mathcal{H}_{n+1}(q, Q)$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός στοιχείων w , καθένα από τα οποία έχει μία ακριβώς από τις ακόλουθες μορφές³:

- (a) $w \in \mathcal{H}_n(q, Q)$
- (b) $w = ug_nv$, $u, v \in \mathcal{H}_n(q, Q)$
- (c) $w = ut_n$, $u \in \mathcal{H}_n(q, Q)$, $t_n = g_n \cdots g_1 t g_1 \cdots g_n$.

Αυτή η κανονική βάση είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη:

- (a) $w \in \mathcal{H}_n(q, Q)$
- (b) $w = ug_nv$, $u, v \in \mathcal{H}_n(q, Q)$
- (c) $w = ut'_n$, $u \in \mathcal{H}_n(q, Q)$, $t'_n = g_n \cdots g_1 t g_1^{-1} \cdots g_n^{-1}$.

Τέλος, για την ύπαρξη του tr θα χρειαστούμε την απεικόνιση $c_n : \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$ που ορίζεται ως:

$$c_n(a \oplus b \oplus c \otimes d) = a + bt'_n + cgd.$$

Η c_n είναι ένας ισομορφισμός ανάμεσα σε $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n)$ -διπρότυπα. Τώρα μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά ένα ίχνος, tr , στο $\mathcal{H} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(q, Q)$ ως εξής: Υποθέτουμε ότι το tr έχει οριστεί στην $\mathcal{H}_n(q, Q)$ και έστω τυχαίο $x \in \mathcal{H}_{n+1}(q, Q)$. Τότε υπάρχουν $a, b, c, d \in \mathcal{H}_n(q, Q)$ τέτοια ώστε $x = c_n(a \oplus b \oplus c \otimes d)$.

$$\text{Ορίζουμε } tr(x) := tr(a) + str(b) + z tr(cd).$$

Αυτό το ίχνος ικανοποιεί τις συνθήκες 2), 3) και 4) του Θεωρήματος 2.1. Μένει να δείξουμε ότι ισχύει επίσης και η ιδιότητα 1) για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$. Αυτό το κάνουμε εξετάζοντας κάθε δυνατή περίπτωση. Οι μόνες μη τετριμμένες περιπτώσεις είναι οι ακόλουθες τρεις:

- (a) $tr(ug_nv t'_n) = tr(t'_n ug_nv)$,
- (b) $tr(ug_nv g_n) = tr(g_n ug_nv)$
- (c) $tr(ut'_n vt'_n) = tr(t'_n ut'_n v)$,

όπου

- i) $u \in H_{n-1}$, $v \in H_{n-1}$ (τετριμμένη περίπτωση),
- ii) $u = ag_{n-1}b$, $a, b \in H_{n-1}$ και $v \in H_{n-1}$,
- iii) όμοια με την περίπτωση ii) με τη διαφορά ότι οι ρόλοι των u και v είναι αντεστραμμένοι,
- iv) $u = ag_{n-1}b, v = cg_{n-1}d$, $a, b, c, d \in H_{n-1}$.

³Ο αλγόριθμος γραφής ενός τυχαίου στοιχείου σαν γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της κανονικής βάσης περιγράφεται στο [GeP].

32ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΚΟΤΣΙΔΕΣ ARTIN ΤΥΠΟΥ \mathcal{B} ΚΑΙ ΙΧΝΗ MARKOV ΤΥΠΟΥ \mathcal{B}

Τέλος παρατηρήστε ότι έχοντας αποδείξει την ύπαρξη, η μοναδικότητα του ίχνους προκύπτει άμεσα αφού δεδομένου ενός $w \in \mathcal{H}_n(q, Q)$, είναι σαφές ότι το $tr(w)$ μπορεί να υπολογιστεί επαγωγικά από τις ιδιότητες 1), 2), 3), 4) και χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα. \square

ΣΧΟΛΙΑ: (1) Αν μια λέξη $a \in \mathcal{H}_n(q, Q)$ δεν περιέχει κανένα t'_i , $\forall i = 0, \dots, n-1$ όπου $t_0 = t$, τότε για τον υπολογισμό του $tr(a)$ χρειαζόμαστε μόνο τις ιδιότητες 1), 2) και 3) του Θεωρήματος 2.1. Έτσι το $tr(a)$ είναι το ίδιο με το ίχνος του $Oscneanu$ εφαρμοσμένο στο a και το a μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο της άλγεβρας *Hecke* \mathcal{A} , $\mathcal{H}_n(q)$. (2) Η ιδιότητα 3) του Θεωρήματος 2.5 είναι αυτή που προσδίδει τον χαρακτηρισμό ίχνος *Markov* στις συναρτήσεις ίχνους.

(3) Αν δεν είχαμε χρησιμοποιήσει τα στοιχεία t'_n στην πιο πάνω κατασκευή δεν θα είχαμε την δυνατότητα να ορίσουμε το ίχνος με μόνο τέσσερις απλούς κανόνες. Ο βασικός λόγος είναι ότι το $B_{1,n}$ αναλύεται ως ημιευθύ γινόμενο της κλασικής ομάδας κοτσίδων B_n και της ελεύθερης υποομάδας της $P_{1,n}$, η οποία παράγεται από τα στοιχεία t, t'_1, \dots, t'_{n-1} :

$$B_{1,n} = P_{1,n} \rtimes B_n.$$

Επιπλέον παρατηρούμε ότι τα t'_i είναι συζυγή μεταξύ τους και κατά συνέπεια θα ισχύει

$$tr(t) = tr(t'_1) = tr(t'_2) = \dots = tr(t'_i), \forall i \in \mathbb{N},$$

πράγμα που δεν ισχύει για τα t_i .

2.3 Ίχνη *Markov* για γενικευμένες και κυκλοτομικές Άλγεβρες *Hecke* τύπου \mathcal{B}

2.3.1 Γενικευμένες και Κυκλοτομικές Άλγεβρες *Hecke* τύπου \mathcal{B}

Όπως είδαμε στην Ενότητα 2.2 η άλγεβρα *Hecke* τύπου \mathcal{B} , $H_n(q, Q)$, είναι η άλγεβρα πηλίκο της άλγεβρας $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, Q^{\pm 1}]B_{1,n}$ διαιρούμενη από το ιδεώδες που παράγεται από τις εκφράσεις $t^2 - (Q-1)t - Q$ και $\sigma_i^2 - (q-1)\sigma_i - q$, $\forall i$.

Αν τώρα καταργήσουμε την τετραγωνική σχέση του t και πάρουμε το πηλίκο της άλγεβρας $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]B_{1,n}$ διαιρούμενη από το ιδεώδες που παράγεται από τις σχέσεις $\sigma_i^2 - (q-1)\sigma_i - q$, $\forall i$, τότε προκύπτει μια άλγεβρα άπειρης διάστασης, που θα συμβολίζεται $H_n(q, \infty)$ και θα ονομάζεται *γενικευμένη άλγεβρα Hecke* τύπου \mathcal{B} βλ. [Lam2]. Με g_i συμβολίζουμε την εικόνα του σ_i στην $H_n(q, \infty)$, ενώ ο συμβολισμός ∞ επιλέχθηκε για να υποδεικνύει ότι ο γεννήτορας t δεν ικανοποιεί καμία σχέση οποιουδήποτε βαθμού (άρα μπορεί να εμφανιστεί οποιαδήποτε δύναμη t^k για $k \in \mathbb{Z}$, όπως ισχύει και στην $B_{1,n}$).

Αν θέσουμε $q = 1$, τότε οι τετραγωνικές σχέσεις παίρνουν την μορφή $g_i^2 = 1$, για κάθε i και προκύπτει η αντίστοιχη *γενικευμένη ομάδα Coxeter* τύπου \mathcal{B}_n , που θα συμβολίζεται ως $W_{n, \infty}$. Έτσι έχουμε τους ακόλουθους δύο ορισμούς:

2.3. ΙΧΝΗ MARKOV ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΤΟΜΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ HECKE ΤΥΠΟΥ \mathcal{B}

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3 Γενικευμένη άλγεβρα Hecke τύπου \mathcal{B} λέγεται η άλγεβρα πηλίκο που ορίζεται ως

$$\mathcal{H}_n(q, \infty) := \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] B_{1,n} / \langle \sigma_i^2 = (q-1)\sigma_i + q \text{ για κάθε } i \rangle .$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4 Γενικευμένη ομάδα Coxeter τύπου \mathcal{B} λέγεται η ομάδα πηλίκο που ορίζεται ως

$$W_{n,\infty} := B_{1,n} / \langle \sigma_i^2 = 1 \text{ για κάθε } i \rangle .$$

Αν όμως αντί να καταργήσουμε πλήρως την τετραγωνική σχέση του t , θελήσουμε να του επιβάλουμε μια σχέση που δίνεται από ένα κυκλοτομικό πολυώνυμο βαθμού d :

$$(t - u_1)(t - u_2) \cdots (t - u_d) = 0$$

όπου $u_1, u_2, \dots, u_d \in \mathbb{C}$, τότε προκύπτει μια πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα γνωστή ως κυκλοτομική άλγεβρα Hecke τύπου \mathcal{B} , $H_n(q, d)$. Παρατηρούμε ότι αν αντικαταστήσουμε τις παραμέτρους u_1, u_2, \dots, u_d με τις d ρίζες της μονάδας, τότε προκύπτει η σχέση

$$t^d = 1.$$

Αν επιπρόσθετα απαιτήσουμε $g_i^2 = 1$, για κάθε i , τότε προκύπτει η αντίστοιχη κυκλοτομική ομάδα Coxeter τύπου \mathcal{B} , που θα συμβολίζεται ως $W_{n,d}$. Άρα έχουμε τους ακόλουθους δύο ορισμούς:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5 Έστω $\mathcal{R} := \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, u_1^{\pm 1}, \dots, u_d^{\pm 1}]$, όπου $q, u_1, \dots, u_d \in \mathbb{C}$. Κυκλοτομική άλγεβρα Hecke τύπου \mathcal{B} βαθμού d λέγεται μία άλγεβρα-πηλίκο που ορίζεται ως:

$$\mathcal{H}_n(q, d) := \mathcal{R} B_{1,n} / \langle \sigma_i^2 - (q-1)\sigma_i - q \forall i, (t - u_1)(t - u_2) \cdots (t - u_d) - 0 \rangle .$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6 Κυκλοτομική ομάδα Coxeter τύπου \mathcal{B} βαθμού d , $d \in \mathbb{N}$ λέγεται μία ομάδα πηλίκο που ορίζεται ως:

$$W_{n,d} := B_{1,n} / \langle \sigma_i^2 = 1 \forall i, t^d = 1 \rangle .$$

ΣΧΟΛΙΑ: 1) Για $d = 2$ παίρνουμε την κλασική άλγεβρα Hecke τύπου \mathcal{B} .

2) Στο Κεφάλαιο 3 θα δούμε ότι τόσο οι γενικευμένες όσο και οι κυκλοτομικές άλγεβρες Hecke τύπου \mathcal{B} σχετίζονται με την θεωρία κόμβων μέσα σε στερεοί τόρο και μάλιστα οι τελευταίες αποτελούν την γέφυρα μεταξύ των $H_n(q, Q)$ και $H_n(q, \infty)$ ⁴.

⁴Για λεπτομέρειες βλέπε [Lam2] Ενότητα 2.

2.3.2 Κατασκευή Ιχνών Markou για γενικευμένες και κυκλοτομικές Άλγεβρες Hecke τύπου \mathcal{B}

Όπως στην άλγεβρα Hecke τύπου \mathcal{B} , $\mathcal{H}_n(q, Q)$, έτσι και στις $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(q, \infty)$, $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(q, d)$ προκειμένου να κατασκευάσουμε γραμμικά ίχνη Markou, χρειαζόμαστε κατάλληλες επαγωγικές βάσεις και για τους δύο αυτούς τύπους αλγεβρών. Η εύρεση των κατάλληλων αυτών βάσεων έχει γίνει στο [Lam2], από το οποίο και έχουμε τα δύο ακόλουθα βασικά θεωρήματα. Οι αποδείξεις τους παραλείπονται καθώς είναι αρκετά τεχνικές και απαιτούν μια πληθώρα από λήμματα και θεωρήματα με αποδείξεις επίσης αρκετά τεχνικές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2 Κάθε στοιχείο της $\mathcal{H}_{n+1}(q, \infty)$ αντίστοιχα της $\mathcal{H}_{n+1}(q, d)$, μπορεί να γραφτεί κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός λέξεων της ακόλουθης μορφής:

- 1) w_{n-1}
- 2) $w_{n-1}g_n g_{n-1} \dots g_i$
- 3) $w_{n-1}g_n g_{n-1} \dots g_{i+1} t_i^k, k \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα \mathbb{Z}_d
- 4) $w_{n-1} t_n^k, k \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα \mathbb{Z}_d

όπου $t_n^k = g_n \dots g_1 t g_1^{-1} \dots g_n^{-1}$ και όπου w_{n-1} είναι λέξη της $\mathcal{H}_n(q, \infty)$ αντίστοιχα $\mathcal{H}_n(q, d)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3 Το σύνολο

$$\Sigma = \{t_{i_1}^{k_1} t_{i_2}^{k_2} \dots t_{i_r}^{k_r} \cdot \sigma\}$$

για $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$, $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα \mathbb{Z}_d , $\sigma \in \mathcal{H}_{n+1}(q)$ και όπου $t_{i_j}^k = g_{i_j} \dots g_1 t g_1^{-1} \dots g_{i_j}^{-1}$ με $j = 1, \dots, r$, αποτελεί μια βάση της $\mathcal{H}_{n+1}(q, \infty)$ αντίστοιχα της $\mathcal{H}_{n+1}(q, d)$.

Η στρατηγική κατασκευής των ιχνών Markou για τις γενικευμένες και κυκλοτομικές άλγεβρες Hecke τύπου \mathcal{B} που παρουσιάζεται παρακάτω αποτελεί γενίκευση της αντίστοιχης στρατηγικής που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη ενότητα, για τις άλγεβρες Hecke τύπου \mathcal{B} . Στο εξής υιοθετούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς: $\mathcal{R} := \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, u_1^{\pm 1}, \dots, u_d^{\pm 1}, \dots]$ και με \mathcal{H}_n θα συμβολίζουμε την $\mathcal{H}_n(q, \infty)$ ή την $\mathcal{H}_n(q, d)$. Επιπλέον ορίζουμε $B := \cup_{n=1}^{\infty} B_{1,n}$ και $\mathcal{H} := \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4 Έστω $z, s_k \in \mathbb{C}$ με $k \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα \mathbb{Z}_d και $k \neq 0$. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική συνάρτηση

$$tr : \mathcal{H} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{R}(z, s_k), k \in \mathbb{Z} \text{ αντίστοιχα } \mathbb{Z}_d$$

που ορίζεται από τους κανόνες:

2.3. ΙΧΝΗ MARKOV ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΤΟΜΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ HECKE ΤΥ

- 1) $tr(ab) = tr(ba)$ $a, b \in \mathcal{H}_n$
- 2) $tr(1) = 1$ $\text{για κάθε } \mathcal{H}_n$
- 3) $tr(ag_n) = z tr(a)$ $a \in \mathcal{H}_n$
- 4) $tr(at'_n{}^k) = s_k tr(a)$ $a \in \mathcal{H}_n, k \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα \mathbb{Z}_d

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4 είναι απαραίτητα κάποια λήμματα και προτάσεις, τα οποία θα παρουσιαστούν ευθύς αμέσως για να μην διακοπεί η ροή της απόδειξης. Προκειμένου να μην υπάρξει σύγχυση με τους δείκτες, τα \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_d θα τα συμβολίζουμε ως Z .

ΛΗΜΜΑ 2.1 Για $\epsilon \in \{\pm 1\}$ ισχύουν στις $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(q, \infty), \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(q, d)$ οι παρακάτω σχέσεις:

- (i) $g_i^\epsilon = q^\epsilon g_i^{-\epsilon} + (q^\epsilon - 1),$
 $g_i^{2\epsilon} = (q^\epsilon - 1) g_i^\epsilon + q^\epsilon, \quad \text{για } q \neq 0.$
- (ii) $g_i^\epsilon (g_k^{\pm 1} g_{k-1}^{\pm 1} \dots g_j^{\pm 1}) = (g_k^{\pm 1} g_{k-1}^{\pm 1} \dots g_j^{\pm 1}) g_{i+1}^\epsilon, \quad \text{για } k > i \geq j,$
 $g_i^\epsilon (g_j^{\pm 1} g_{j+1}^{\pm 1} \dots g_k^{\pm 1}) = (g_j^{\pm 1} g_{j+1}^{\pm 1} \dots g_k^{\pm 1}) g_{i-1}^\epsilon, \quad \text{για } k \geq i > j,$
όπου το πρόσημο ± 1 του εκθέτη είναι το ίδιο για όλους τους γεννήτορες.
- (iii) $g_i g_{i-1} \dots g_{j+1} g_j g_{j+1} \dots g_i = g_j g_{j+1} \dots g_{i-1} g_i g_{i-1} \dots g_{j+1} g_j,$
 $g_i^{-1} g_{i-1}^{-1} \dots g_{j+1}^{-1} g_j^\epsilon g_{j+1} \dots g_i = g_j g_{j+1} \dots g_{i-1} g_i^\epsilon g_{i-1}^{-1} \dots g_{j+1}^{-1} g_j^{-1}.$
- (iv) $g_i^\epsilon \dots g_{n-1}^\epsilon g_n^\epsilon g_{n-1}^\epsilon \dots g_i^\epsilon =$
 $(q^\epsilon - 1) \sum_{r=0}^{n-i} q^{\epsilon r} (g_i^\epsilon \dots g_{n-r-1}^\epsilon g_{n-r}^\epsilon g_{n-r-1}^\epsilon \dots g_i^\epsilon) + q^{\epsilon(n-i+1)} =$
 $\sum_{r=0}^{n-i+1} (q^\epsilon - 1)^{\epsilon r} q^{\epsilon r} (g_i^\epsilon \dots g_{n-r-1}^\epsilon g_{n-r}^\epsilon g_{n-r-1}^\epsilon \dots g_i^\epsilon),$
όπου $\epsilon_r = 1$ αν $r \leq n-i$ και $\epsilon_{n-i+1} = 0.$
Όμοια,
 $g_i^\epsilon \dots g_2^\epsilon g_1^\epsilon g_1^\epsilon g_2^\epsilon \dots g_i^\epsilon =$
 $(q^\epsilon - 1) \sum_{r=0}^{i-1} q^{\epsilon r} (g_i^\epsilon \dots g_{r+2}^\epsilon g_{r+1}^\epsilon g_{r+2}^\epsilon \dots g_i^\epsilon) + q^{\epsilon i} =$
 $\sum_{r=0}^i (q^\epsilon - 1)^{\epsilon r} q^{\epsilon r} (g_i^\epsilon \dots g_{r+2}^\epsilon g_{r+1}^\epsilon g_{r+2}^\epsilon \dots g_i^\epsilon),$
όπου $\epsilon_r = 1$ αν $r \leq i-1$ και $\epsilon_i = 0.$
- (v) $t^\lambda g_1 t g_1 = g_1 t g_1 t^\lambda \quad \text{για } \lambda \in \mathbb{Z},$
 $g_i t_k^\epsilon = t_k^\epsilon g_i \quad \text{για } k > i, k < i-1,$
 $g_i t_i = q t_{i-1} g_i + (q-1) t_i,$
 $g_i t_{i-1} = q^{-1} t_i g_i + (q^{-1} - 1) t_i,$
 $g_i t_{i-1}^{-1} = q t_{i-1}^{-1} g_i + (q-1) t_{i-1}^{-1},$
 $g_i t_i^{-1} = q^{-1} t_{i-1}^{-1} g_i + (q^{-1} - 1) t_{i-1}^{-1}.$

- (vi) $g_i t_k^\epsilon = t_k^\epsilon g_i$ για $k > i, k < i - 1,$
 $g_i t_i^\epsilon = t_{i-1}^\epsilon g_i + (q - 1) t_i^\epsilon + (1 - q) t_{i-1}^\epsilon,$
 $g_i t_{i-1}^\epsilon = t_i^\epsilon g_i.$
- (vii) $t_i^k t_j^\lambda = t_j^\lambda t_i^k$ για $i \neq j$ και $k, \lambda \in \mathbb{Z}.$
- (viii) $t_i^k = g_i \dots g_1 t^k g_1^{-1} \dots g_i^{-1}$ για $k \in \mathbb{Z}.$
 Στην $\mathcal{H}_n(q, d)$ θα έχουμε:
 $(t_i^\epsilon - u_1)(t_i^\epsilon - u_2) \dots (t_i^\epsilon - u_d) = 0,$ το οποίο υπονοεί ότι $t_i^{\epsilon d} = a_{d-1} t_i^{\epsilon(d-1)} + \dots + a_0,$
 όπου $a_{d-1} = u_1 + \dots + u_d, a_{d-2} = -(u_1 u_2 + \dots + u_{d-1} u_d), \dots, a_0 = (-1)^d (u_1 \dots u_d).$

ΛΗΜΜΑ 2.2 (Θεμελιώδες Λήμμα) Για $i, k \in \mathbb{N}$ και για $\epsilon \in \{\pm 1\}$ ισχύουν τα ακόλουθα για την $\mathcal{H}_n(q, \infty)$ αντίστοιχα για την $\mathcal{H}_n(q, d)$:

- (i) $t^{\epsilon i} g_1^\epsilon t^{\epsilon k} g_1^\epsilon = g_1^\epsilon t^{\epsilon k} g_1^\epsilon t^{\epsilon i} +$
 $(q^\epsilon - 1) [t^\epsilon g_1^\epsilon t^{\epsilon(k+i-1)} + t^{2\epsilon} g_1^\epsilon t^{\epsilon(k+i-2)} + \dots + t^{\epsilon i} g_1^\epsilon t^{\epsilon k}] +$
 $(1 - q^\epsilon) [t^{\epsilon k} g_1^\epsilon t^{\epsilon i} + t^{\epsilon(k+1)} g_1^\epsilon t^{\epsilon(i-1)} + \dots + t^{\epsilon(k+i-1)} g_1^\epsilon t^\epsilon]$ και
- (ii) $t^{-\epsilon i} g_1^\epsilon t^{\epsilon k} g_1^\epsilon = g_1^\epsilon t^{\epsilon k} g_1^\epsilon t^{-\epsilon i} +$
 $(q^\epsilon - 1) [t^{\epsilon(k-1)} g_1^\epsilon t^{-\epsilon(i-1)} + t^{\epsilon(k-2)} g_1^\epsilon t^{-\epsilon(i-2)} + \dots + t^{\epsilon(k-i)} g_1^\epsilon] +$
 $(1 - q^\epsilon) [t^{-\epsilon(i-1)} g_1^\epsilon t^{\epsilon(k-1)} + t^{-\epsilon(i-2)} g_1^\epsilon t^{\epsilon(k-2)} + \dots + g_1^\epsilon t^{\epsilon(k-i)}].$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1 Η συνάρτηση tr ικανοποιεί τις ακόλουθες πύο ισχυρές εκδοχές των ιδιοτήτων 3) και 4) του Θεωρήματος 2.4:

- (3) $tr(ag_n b) = z tr(ab),$ για κάθε $a, b \in \mathcal{H}_n,$
 (4) $tr(x t_n^k y) = s_k tr(xy),$

για κάθε $x, y \in \mathcal{H}_n, k \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα $\mathbb{Z}_d.$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Η ιδιότητα (3') επαληθεύεται εύκολα με χρήση της επαγωγής και της γραμμικότητας. Για να αποδειχθεί η (4') αρκεί να την αποδείξουμε για την περίπτωση όπου το y έχει την μορφή $y = y_1 t^\lambda y_2,$ όπου y_1 είναι γινόμενο των g_i για $i = 1, \dots, n - 1, \lambda \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα \mathbb{Z}_d και y_2 μια τυχαία λέξη της $\mathcal{H}_n.$ Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} tr(x t_n^k y) &= tr(x \underline{t_n^k y_1 t^\lambda y_2}) \stackrel{\text{Λήμμα 2.1(vi)}}{=} tr(x y_1 t_n^k t^\lambda y_2) \\ &= tr(x y_1 g_n \dots g_1 t^k g_1^{-1} g_2^{-1} \dots g_n^{-1} t^\lambda y_2) \stackrel{\text{Λήμμα 2.1(vi)}}{=} \\ &= tr(x y_1 g_n \dots g_1 t^k g_1^{-1} t^\lambda g_2^{-1} \dots g_n^{-1}) =: A \end{aligned}$$

2.3. ΙΧΝΗ MARKOV ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΤΟΜΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ HECKE ΤΥ

Η τελευταία υπογραμμισμένη έκφραση μας λέει ότι έχουμε να εξετάσουμε τέσσερα δυνατά ενδεχόμενα εξαρτώμενα από το αν τα k, λ είναι θετικά ή αρνητικά. Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου τα k, λ είναι και τα δύο θετικά. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις αποδεικνύονται με ανάλογο τρόπο. Για k, λ θετικά από το Λήμμα 2.2(i) έχουμε:

$$\begin{aligned} g_1 t^k g_1^{-1} t^\lambda &= t^\lambda g_1 t^k g_1^{-1} + (q^{-1} - 1) [t^{\lambda-1} g_1 t^{k+1} + \dots + g_1 t^{k+\lambda}] \\ &+ (1 - q^{-1}) [t^k g_1 t^\lambda + \dots + t^{k+\lambda-1} g_1 t]. \end{aligned}$$

Και με αντικατάσταση στο A προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} A &= tr(xy_1 \underline{g_n \dots g_2 t^\lambda g_1 t^k g_1^{-1} \dots g_n^{-1} y_2}) \\ &+ (q^{-1} - 1) [tr(xy_1 \underline{g_n \dots g_2 t^{\lambda-1} g_1 t^{k+1} g_2^{-1} \dots g_n^{-1} y_2}) + \dots \\ &+ tr(xy_1 \underline{g_n \dots g_1 t^{k+\lambda} g_2^{-1} \dots g_n^{-1} y_2})] \\ &+ (1 - q^{-1}) [tr(xy_1 \underline{g_n \dots g_2 t^k g_1 t^\lambda g_2^{-1} \dots g_n^{-1} y_2}) + \dots \\ &+ tr(xy_1 \underline{g_n \dots g_2 t^{k+\lambda-1} g_1 t g_2^{-1} \dots g_n^{-1} y_2})] \stackrel{\text{Λήμμα 2.1(vi)}}{=} \\ &= tr(xy_1 t^\lambda t_n^k y_2) \\ &+ (q^{-1} - 1) [tr(xy_1 t^{\lambda-1} \underline{g_n \dots g_1 g_2^{-1} \dots g_n^{-1} t^{k+1} y_2}) + \dots \\ &+ tr(xy_1 \underline{g_n \dots g_1 g_2^{-1} \dots g_n^{-1} t^{k+\lambda} y_2})] \\ &+ (1 - q^{-1}) [tr(xy_1 t^k \underline{g_n \dots g_1 g_2^{-1} \dots g_n^{-1} t^\lambda y_2}) + \dots \\ &+ tr(xy_1 t^{k+\lambda-1} \underline{g_n \dots g_1 g_2^{-1} \dots g_n^{-1} t y_2})] \stackrel{\text{Λήμμα 2.1,(iii)}}{=} \\ &= tr(xy_1 t^\lambda t_n^k y_2) \\ &+ (q^{-1} - 1) [tr(xy_1 t^{\lambda-1} g_1^{-1} \dots g_{n-1}^{-1} \underline{g_n \dots g_1 t^{k+1} y_2}) + \dots \\ &+ tr(xy_1 g_1^{-1} \dots g_{n-1}^{-1} \underline{g_n \dots g_1 t^{k+\lambda} y_2})] \\ &+ (1 - q^{-1}) [tr(xy_1 t^k g_1^{-1} \dots g_{n-1}^{-1} \underline{g_n \dots g_1 t^\lambda y_2}) + \dots \\ &+ tr(xy_1 t^{k+\lambda-1} g_1^{-1} \dots g_{n-1}^{-1} \underline{g_n \dots g_1 t y_2})] \stackrel{(3')}{=} \\ &= tr(xy_1 t^\lambda t_n^k y_2) + (q^{-1} - 1)z [tr(xy_1 t^{\lambda+k} y_2)] + (1 - q^{-1})z [tr(xy_1 t^{k+\lambda} y_2)] \\ &= tr(xy_1 t^\lambda t_n^k y_2). \quad \square \end{aligned}$$

Η ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος 2.4 είναι να κατασκευαστεί συνάρτηση tr στη $\nu \cup_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n$ επαγωγικά χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2.

ΛΗΜΜΑ 2.3 Η απεικόνιση

$$c_n : (\mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} \mathcal{H}_n) \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$$

38 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΚΟΤΣΙΔΕΣ ARTIN ΤΥΠΟΥ Β ΚΑΙ ΙΧΝΗ MARKOV ΤΥΠΟΥ Β

που δίνεται από τον τύπο $c_n(a \otimes b \oplus_k e_k) := ag_nb + \sum_{k \in Z} e_k t_n'^k$ είναι ισομορφισμός ανάμεσα σε $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n)$ -διπρότυπα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από το Θεώρημα 2.2 προκύπτει ότι το παρακάτω σύνολο \mathcal{R}_n^* (γενίκευση του \mathcal{R}_n του Θεωρήματος 2.1) αποτελεί βάση της \mathcal{H}_n ως ελεύθερο \mathcal{H}_{n-1} -πρότυπο:

$$\mathcal{L}^*_n := \{g_{n-1}g_{n-2} \dots g_i \mid i = 1, \dots, n-1\} \cup \{t_{n-1}'^k \mid k \in Z\} \cup \\ \{g_{n-1}g_{n-2} \dots g_1 t^k g_1^{-1} \dots g_i^{-1} \mid i = 1, \dots, n-2, k \in Z, k \neq 0\}.$$

Τότε έχουμε: $\mathcal{H}_n = \bigoplus_{b \in \mathcal{R}_n^*} \mathcal{H}_{n-1}b$.

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την γενική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} \mathcal{H}_n &= \mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} (\bigoplus_{b \in \mathcal{R}_n^*} \mathcal{H}_{n-1} \cdot b) \\ &= \bigoplus_{b \in \mathcal{R}_n^*} (\mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} \mathcal{H}_{n-1}b) \\ &= \bigoplus_{b \in \mathcal{R}_n^*} \mathcal{H}_n b. \end{aligned}$$

Έτσι:

$$(\mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} \mathcal{H}_n) \oplus_{k \in Z} \mathcal{H}_n = (\bigoplus_{b \in \mathcal{R}_n^*} \mathcal{H}_n \cdot b) \oplus_{k \in Z} \mathcal{H}_n.$$

Όμοια το παρακάτω σύνολο \mathcal{R}_{n+1}^* αποτελεί βάση της \mathcal{H}_{n+1} ως ελεύθερο \mathcal{H}_n -πρότυπο:

$$\mathcal{R}_{n+1}^* := \{g_n g_{n-1} \dots g_i \mid i = 1, \dots, n\} \cup \{t_n'^k \mid k \in Z\} \cup \\ \{g_n g_{n-1} \dots g_1 t^k g_1^{-1} \dots g_i^{-1} \mid i = 1, \dots, n-1, k \in Z, k \neq 0\}.$$

Άρα:

$$\mathcal{H}_{n+1} = \bigoplus_{b \in \mathcal{R}_{n+1}^*} \mathcal{H}_n b.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η c_n είναι πράγματι ισομορφισμός ανάμεσα σε $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n)$ -διπρότυπα, καθώς υπάρχει αντιστοιχία 1-1 και επί στοιχείων της βάσης σε στοιχεία του συνόλου \mathcal{R}_{n+1}^* . \square

Απόδειξη Θεωρήματος 2.4:

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε επαγωγικά το ίχνος, tr , στην $\mathcal{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$ ως ακολούθως: υποθέτουμε ότι η συνάρτηση tr ορίζεται στην \mathcal{H}_n και έστω τυχαίο $x \in \mathcal{H}_{n+1}$. Από το Λήμμα 2.3 υπάρχουν $a, b, e_k \in \mathcal{H}_n$, $k \in Z$, τ.ω:

$$x := c_n(a \otimes b \oplus_k e_k).$$

Τότε ορίζουμε:

$$tr(x) := z \cdot tr(ab) + tr(e_0) + \sum_{k \in Z} s_k \cdot tr(e_k).$$

2.3. ΙΧΝΗ MARKOV ΓΙΑ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΤΟΜΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ HECKE ΤΥ

η οποία είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, ικανοποιεί τις ιδιότητες 2), 3) και 4) των υποθέσεων του Θεωρήματος 2.4. Προκειμένου να δείξουμε ότι η tr είναι συνάρτηση ίχνους αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί την ιδιότητα της συζυγίας. Γι' αυτό εξετάζουμε τη σχέση $tr(ax) = tr(xa)$ για κάθε $a, x \in \mathcal{H}$. Αφού η tr ορίζεται επαγωγικά, δεχόμαστε ότι η εξεταζόμενη σχέση ισχύει για κάθε $a, x \in \mathcal{H}_n$, και θα την δείξουμε για $a, x \in \mathcal{H}_{n+1}$. Το τελευταίο αρκεί να το δείξουμε για τυχαίο $a \in \mathcal{H}_{n+1}$ και για x να είναι ένας από τους γεννήτορες της \mathcal{H}_{n+1} . Ισοδύναμα αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} tr(ag_i) &= tr(g_i a) & a \in \mathcal{H}_{n+1}, i = 1, \dots, n \\ tr(at) &= tr(ta) & a \in \mathcal{H}_{n+1}, \end{aligned}$$

όπου το a θα παίρνει μία από τις μορφές του Θεωρήματος 2.2. Συγκεκριμένα θα έχουμε τις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις:

- i) $a = w_{n-1}$
- ii) $a = w_{n-1}g_n g_{n-1} \dots g_i$
- iii) $a = w_{n-1}g_n g_{n-1} \dots g_{i+1}t_i^k, k \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα \mathbb{Z}_d
- iv) $a = w_{n-1}t_n^k, k \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα \mathbb{Z}_d

Αν $a = w_{n-1}$ και $x = t$ ή $x = g_i$ για $i = 1, \dots, n-1$ ο ισχυρισμός ισχύει από επαγωγική υπόθεση, ενώ για $x = g_n$ προκύπτει από Πρόταση 2.1(3') ότι $tr(w_{n-1}g_n) = ztr(a) = tr(g_n w_{n-1})$.

Αν το a είναι της μορφής ii) ή iii) και $x = t$ ή $x = g_i$ για $i = 1, \dots, n-1$ εφαρμόζουμε τα ίδια επιχειρήματα όπως πιο πάνω κάνοντας χρήση της (3'). Έτσι μένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις όπου $a = w_{n-1}g_n g_{n-1} \dots g_i$ ή $a = w_{n-1}g_n g_{n-1} \dots g_{i+1}t_i^k$ και $x = g_n$, δηλαδή

$$\begin{aligned} tr(w_{n-1}g_n g_{n-1} \dots g_i g_n) &= tr(g_n w_{n-1}g_n g_{n-1} \dots g_i) \\ tr(w_{n-1}g_n g_{n-1} \dots g_{i+1}t_i^k g_n) &= tr(g_n w_{n-1}g_n g_{n-1} \dots g_{i+1}t_i^k) \end{aligned} \quad (*)$$

Αν το a είναι της μορφής iv) και $x = t$ ή $x = g_i$ για $i = 1, \dots, n-1$ έχουμε να εξετάσουμε τις ισότητες:

$$\begin{aligned} tr(w_{n-1}t_n^k t) &= tr(t w_{n-1}t_n^k) \\ tr(w_{n-1}t_n^k g_i) &= tr(g_i w_{n-1}t_n^k) \end{aligned} \quad (**)$$

Τέλος αν το a είναι της μορφής iv) και $x = g_n$ έχουμε να εξετάσουμε την ισότητα:

$$tr(w_{n-1}t_n^k g_n) = tr(g_n t w_{n-1}t_n^k) \quad (***)$$

Οι σχέσεις (*), (**) και (***) αποδεικνύονται με χρήση των κανόνων (3') και (4') της

Πρότασης 2.1, του Λήμματος 2.2 και του Λήμματος 2.1.

Η ιδιότητα 3) αντανακλά την ιδιότητα *Markou* και έτσι, από την στιγμή που η συνάρτηση tr είναι ίχνος, συνεπάγεται ότι θα είναι και ίχνος *Markou*. Τέλος η μοναδικότητα του ίχνους tr προκύπτει άμεσα καθώς για κάθε $x \in \mathcal{H}_{n+1}$, το $tr(x)$ μπορεί να υπολογιστεί επαγωγικά με χρήση μόνο των ιδιοτήτων 1), 2), 3), 4) και της γραμμικότητας.

ο.ε.δ.

2.4 Ταξινόμηση των Ιχνών *Markou* για Άλγεβρες *Hecke* τύπου \mathcal{B}

2.4.1 Συναρτήσεις Ίχνους σε Άλγεβρες *Hecke* τύπου \mathcal{B}

Έστω $w \in W_n$ και υποθέτουμε ότι έχουμε μια μειωμένη έκφραση αυτού ως γινόμενο των γεννητόρων t, s_1, \dots, s_{n-1} . Τότε, η αντίστοιχη έκφραση του w στην $H_n := H_n(q, Q)$ ως προς τους γενήτορες t, g_1, \dots, g_{n-1} είναι ανεξάρτητη από την επιλεγμένη μειωμένη έκφρασή του w . Έτσι το στοιχείο αυτό στην H_n , μπορούμε να το συμβολήσουμε μονοσήμαντα ως g_w . Είναι γνωστό ότι το σύνολο $\{g_w | w \in W_n\}$ δημιουργεί μια A -βάση για την H_n , όπου A ένας αντιμεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Έτσι θα έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις.

$$g_w g_{w'} = g_{ww'} \quad \text{αν } l(ww') = l(w) + l(w'). \quad (2.1)$$

Το σύνολο \mathcal{R}_n (του Θεωρήματος 2.1) μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή,

$$\mathcal{R}_n := \{1, t_{n-1}, s_{n-1}s_{n-2} \cdots s_{n-k} \quad (1 \leq k \leq n-1), s_{n-1}s_{n-2} \cdots s_{n-k}t_{n-k-1} \quad (1 \leq k \leq n-1)\}.$$

(Παρατήρησε ότι $\mathcal{R}_1 = \{1, t\}$.) Τότε κάθε στοιχείο $w \in W_n$ μπορεί να γραφεί μοναδικά στην ακόλουθη μορφή, $w = r_1 \cdots r_n$ όπου $r_i \in \mathcal{R}_i$. Μια τέτοια έκφραση του w είναι μειωμένη (εύκολο) κι έτσι έχουμε $l(w) = l(r_1) + \dots + l(r_n)$.

Επιπλέον έστω $\mathcal{D}_n := \{1, s_{n-1}, t_{n-1}\} \subseteq \mathcal{R}_n$. Το \mathcal{D}_n είναι το σύνολο των επιλεγμένων αντιπροσώπων των διπλών συμπλόκων της ομάδας W_{n-1} στο W_n (βλέπε...).

Έτσι κάθε $r \in \mathcal{R}_n$ μπορεί να γραφεί κατα μοναδικό τρόπο στην μορφή $r = dr'$ όπου $d \in \mathcal{D}_n$ και $r' = 1$ ή $r' = s_{n-2} \cdots s_{n-k}$ ή $r' = s_{n-2} \cdots s_{n-k}t_{n-k-1}$, δηλαδή $r' \in \mathcal{R}_{n-1}$.

Ορίζουμε,

$$T'_i := \sigma_i \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 T \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{i-1}^{-1} \sigma_i^{-1} \in \widetilde{W}_n \quad \text{για κάθε } 0 \leq i \leq n-1$$

2.4. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΙΧΝΩΝ MARKOV ΓΙΑ ΑΛΓΕΒΡΕΣ HECKE ΤΥΠΟΥ B41

Κάθε T'_i αντιστοιχεί στο t_i μέσω του επιμορφισμού $\widetilde{W}_n \rightarrow W_n$ κι έτσι ως $\mathcal{D}'_n \subseteq \mathcal{R}'_n \subseteq \widetilde{W}_n$ θα συμβολίζουμε τα ανάλογα σύνολα των $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{R}_n \subseteq W_n$, όπου τα t_i έχουν αντικατασταθεί από τα T'_i .

Παρατήρηση

Για κάθε i, j τα στοιχεία t_i και t_j αντιμετατίθενται μεταξύ τους (εύκολο γεωμετρικά). Για τα T'_i και $T'_j \in \widetilde{W}_n$ αυτό είναι αληθές μόνο σε πιθανή αλλαγή κάποιων αντιστρόφων των στοιχείων του ορισμού τους. Έτσι ορίζουμε τα ακόλουθα στοιχεία. Για κάθε $j \in \{1, \dots, i\}$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} T'_{i,j} &:= \sigma_i^{\pm 1} \cdots \sigma_{j+1}^{\pm 1} \sigma_j \sigma_{j-1} \cdots \sigma_1 T \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{\mp 1} \cdots \sigma_i^{\mp 1} \\ &= \sigma_i^{\pm 1} \cdots \sigma_{j+1}^{\pm 1} T'_j \sigma_{j+1}^{\mp 1} \cdots \sigma_i^{\mp 1} \end{aligned}$$

(Όλοι οι αντιστροφικοί μέχρι τον δείκτη j είναι στην σωστή θέση και για τους υπόλοιπους μεγαλύτερους δείκτες, η αντιστροφή μπορεί να μπει είτε στην δεξιά είτε στην αριστερή πλευρά.)

Τέλος ως $\mathcal{D}'_{n,j}$ ορίζουμε το σύνολο που αποτελείται από τα $1, \sigma_{n-1}$ και από όλα τα πιθανά στοιχεία της μορφής $T'_{n-1,j}$. Όμοια ορίζουμε και το $\mathcal{R}'_{n,j}$. Σαν σύμβαση, τα στοιχεία του $\mathcal{D}'_{n,0}$ θα τα συμβολίζουμε d_n^* .

Το ακόλουθο λήμμα δείχνει ότι το γινόμενο της μορφής $T'_i T'_j$ με $i < j$, ισούται με $T'_{j,i} T'_i$.

ΛΗΜΜΑ 2.4

(a) $\sigma_i T'_m = T'_m \sigma_i$ και $\sigma_i^{-1} T'_m = T'_m \sigma_i^{-1}$ για κάθε $i \neq m, m+1$.

(b) $T'_i T'_m = \sigma_m \cdots \sigma_{i+2} \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \cdots \sigma_1 T \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1} \sigma_{i+2}^{-1} \cdots \sigma_m^{-1} T'_i$ για κάθε $i < m$.

(c) $\sigma_{m-1} \cdots \sigma_{m-k} T'_{m-k-1} T'_m = T'_{m,m-1} \sigma_{m-1} \cdots \sigma_{m-k} T'_{m-k-1}$ για κάθε $0 \leq k \leq m-1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Οι σχέσεις του ορισμού της \widetilde{W}_n συνεπάγονται τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} T \sigma_i^{-1} &= \sigma_i^{-1} T, & \text{αν } i > 1, \\ \sigma_i \sigma_j^{-1} &= \sigma_j^{-1} \sigma_i, & \text{αν } |i-j| > 1, \\ \sigma_1 \sigma_{i+1} \sigma_i^{-1} &= \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & \text{αν } 1 \leq i \leq n-2, \\ \sigma_1^{-1} T \sigma_1 T &= T \sigma_1 T \sigma_1^{-1}. \end{aligned}$$

Η επιβεβαίωση τώρα των a), b), c) προκύπτει εύκολα από απλούς υπολογισμούς. \square

Έστω τώρα ένα στοιχείο της μορφής $d_1 \cdots d_n \in \widetilde{W}_n$ με $d_i \in \mathcal{D}'_i$ για κάθε i . Αν συλλέξουμε μαζί μη τετριμμένους όρους με διαδοχικούς δείκτες, παίρνουμε μια ανασύνθεση αυτού του στοιχείου ως γινόμενο προσημασμένων μπλόκ. Συγκεκριμένα, θετικό, αντίστοιχα αρνητικό, μπλοκ μήκους $m+1 \geq 0$ στην \widetilde{W}_n , είναι ένα στοιχείο της μορφής:

$$\sigma_{i+1} \sigma_{i+2} \cdots \sigma_{i+m} \text{ αντίστοιχα } T'_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_{i+m}$$

42ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΚΟΤΣΙΔΕΣ ARTIN ΤΥΠΟΥ Β ΚΑΙ ΞΗΝΗ MARKOV ΤΥΠΟΥ Β

όπου $m, i \geq 0$. Αν ένα τέτοιο στοιχείο το συμβολίσουμε ως $b(i, m)$ τότε

$$d_1 \cdots d_n = b(i_1, m_1)b(i_2, m_2)b(i_3, m_3) \cdots, \text{ όπου } i_2 > i_1 + m_1, i_3 > i_2 + m_2, \dots \quad (*)$$

Οι εικόνες των στοιχείων $T'_i, T'_{i,j} \in \widetilde{W}_n$ μέσω του επιμορφισμού $A\widetilde{W}_n \rightarrow H_n$ είναι στοιχεία της H_n τα οποία είναι καλά ορισμένα (λόγω του ότι τα g_i είναι αντιστρέψιμα αφού το q με την σειρά του είναι αντιστρέψιμο στο A) και θα τα συμβολίζουμε ως t'_i και $t'_{i,j}$ αντίστοιχα. Επίσης θα γράφουμε

$$\mathcal{D}'_n := \{1, g_{n-1}, t'_{n-1}\}$$

και όμοια για τα $\mathcal{R}'_n, \mathcal{D}'_{n,i}$ και $\mathcal{R}'_{n,i}$. Έτσι όλα τα αποτελέσματα που σχετίζονται με ειδικές περιπτώσεις αντιμεταθέσεων και συζυγίας στοιχείων της \widetilde{W}_n (βλέπε Λήμματα 2.4 και 2.5), μεταφέρονται δίχως αλλαγές στην H_n .

Έστω $w \in W_n$, το οποίο σύμφωνα με τα προηγούμενα έχει την μορφή $w = r_1 \cdots r_n$ όπου $r_i \in \mathcal{R}_i$ για κάθε i . Αφού η έκφραση είναι μειωμένη θα έχουμε ότι $g_w = g_{r_1} \cdots g_{r_n}$. Έστω ότι για κάθε $r_i, r'_i \in \mathcal{R}'_i$ είναι το αντίστοιχο στοιχείο στην H_n (όπου τα σ_j έχουν αντικατασταθεί από τα g_j και τα t_j από τα t'_j). Έστω επίσης $n_w \geq 0$ το συνολικό πλήθος των αντιστρόφων των όρων r'_1, \dots, r'_n . Κάνοντας τώρα χρήση του τύπου του g_i^{-1} , προκύπτει ότι

$$g_w = q^{n_w} r'_1 \cdots r'_n + A - \text{γραμμικό συνδιασμό στοιχείων } g_v \text{ με } l(v) < l(w).$$

Από το τελευταίο προκύπτει ότι τα στοιχεία $\{r'_1 \cdots r'_n | r'_i \in \mathcal{R}'_i\}$, σχηματίζουν μια A -βάση για την H_n .

Παρατηρήσεις

(1) Έστω $\mathcal{C} = \{C\}$ το σύνολο των κλάσεων συζυγίας της W_n και έστω w_C το στοιχείο με το μικρότερο μήκος σε μια κλάση C το οποίο ανασυνθέτεται ως γινόμενο αρνητικών μπλοκ (που είναι διατεταγμένα κατά αυξανόμενο μήκος) ακολουθούμενα από ποικίλα θετικά μπλόκ (βλέπε σελ. 41). Αν επιπλέον απαιτήσουμε τα θετικά μπλόκ να είναι διατεταγμένα κατά αυξανόμενο μήκος, μπορούμε να επιλέξουμε κατά μοναδικό τρόπο και έτσι να συγκεκριμενοποιήσουμε το επιλεγμένο w_C . Έτσι μπορούμε να ορίσουμε το στοιχείο $g_C \in H_n$ παίρνοντας την έκφραση $w_C = d_1 \cdots d_n$ (όπου $d_i \in \mathcal{D}_i$) και αντικαθιστώντας κάθε s_i με g_i και κάθε t_i με t'_i . Σύμφωνα με την τελευταία ισότητα θα έχουμε (με $n_C := n_{w_C}$) ότι:

$$g_{w_C} = q^{n_C} g_C + A - \text{γραμμικό συνδυασμό στοιχείων } g_v \text{ με } l(v) < l(w_C).$$

(2) Μια A -γραμμική συνάρτηση $\phi : H_n \rightarrow A$ θα ονομάζεται *συνάρτηση ίχνους* αν $\phi(hh') = \phi(h'h)$, $\forall h, h' \in H_n$. Κάθε συνάρτηση ίχνους στην H_n είναι μοναδικά προσδιορισμένη από τις τιμές τις στα στοιχεία $g_{w_C} \forall C \in \mathcal{C}$ (βλέπε $[G - P]$). Αντίστροφα, δεδομένου ενός συνόλου στοιχείων $\alpha_C \in A$, ένα για κάθε κλάση συζυγίας C , υπάρχει μοναδική συνάρτηση ίχνους ϕ της H_n τέτοια ώστε $\phi(g_{w_C}) = \alpha_C, \forall C$. Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι τα αποτελέσματα του προσδιορισμού των

2.4. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΙΧΝΩΝ MARKOV ΓΙΑ ΑΛΓΕΒΡΕΣ HECKE ΤΥΠΟΥ B43

συναρτήσεων ίχνους, παραμένουν έγκυρα ακόμα και όταν αντικαταστήσουμε κάθε g_{w_C} με g_C , για κάθε C .

Το ακόλουθο αποτέλεσμα (για απόδειξη βλέπε [GeL], σελ. 200) δείχνει ότι οι υπολογισμοί για την τιμή μιας συνάρτησης ίχνους σε ένα στοιχείο ανάγονται στις τιμές των στοιχείων που έχουν την μορφή προσημασμένων μπλόκ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2 Για κάθε $h \in H_n$ υπάρχει ένα πεπερασμένο (μη κενό) υποσύνολο $I(h) \subseteq A \times \mathcal{D}'_{1,0} \times \cdots \times \mathcal{D}'_{n,0}$ τέτοιο ώστε

$$\phi(h) = \sum_{(r, d_1^*, \dots, d_n^*) \in I(h)} r \phi(d_1^* \cdots d_n^*),$$

για κάθε συνάρτηση ίχνους ϕ της H_n .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Ο ισχυρισμός της πρότασης ισχύει για $n = 1$. Έστω τώρα $1 < j \leq n$ και υποθέτουμε ότι έχουμε είδη βρει ένα πεπερασμένο (μη κενό) υποσύνολο $I_j \subseteq H_j \times \mathcal{D}'_{j+1, j-1} \times \cdots \times \mathcal{D}'_{n, j-1}$ τέτοιο ώστε

$$\phi(h) = \sum_{(h_j, d'_{j+1}, \dots, d'_n) \in I_j} r \phi(h_j d'_{j+1} \cdots d'_n),$$

για κάθε συνάρτηση ίχνους ϕ της H_n . Θα συνεχίσουμε με φθίνουσα επαγωγή στο j . Για $n = j$ δεν υπάρχει τίποτα να δείξουμε. Τώρα θα δείξουμε τον ανάλογο ισχυρισμό, έχοντας αντικαταστήσει το j με το $j - 1$. Αυτό γίνεται ως ακολούθως.

Εξετάζουμε ένα στοιχείο της μορφής $(h_j, d'_{j+1}, \dots, d'_n) \in I_j$. Το στοιχείο h_j είναι ένας A -γραμμικός συνδιασμός των στοιχείων της βάσης g_w με $w \in W_j$. Από την προηγούμενη συζήτηση, αυτό μπορεί να γραφεί ως A -γραμμικός συνδυασμός γινομένων $r'_1 \cdots r'_j$ με $r'_i \in \mathcal{R}'_i$. Επιλέγοντας όρους με σταθερή τιμή στο r'_j , παίρνουμε ένα πεπερασμένο (μη κενό) υποσύνολο $R(h_j) \subseteq H_{j-1} \times \mathcal{R}'_j$ τέτοιο ώστε

$$h_j = \sum_{(h_{j-1}, r'_j) \in R(h_j)} h_{j-1} r'_j.$$

Επίσης έχουμε ότι $r'_j = d'_j r''_{j-1}$ με $d'_j \in \mathcal{D}'_j$ και $r''_{j-1} \in \mathcal{R}''_{j-1}$. Τώρα το στοιχείο r''_{j-1} είτε είναι κάποιο γινόμενο των γεννητόρων g_1, \dots, g_{j-2} είτε είναι όπως το στοιχείο που εξετάσαμε στο Λήμμα 2.4(c). Σε κάθε περίπτωση αντιμετωπίζεται με το d'_{j+1} με πιθανές αλλαγές σε κάποιους αντίστροφους με δείκτες μεγαλύτερους από $j - 2$ και όμοια για το d'_{j+2}, \dots, d'_n . Έτσι συμπεραίνουμε ότι

$$h_j d'_{j+1} \cdots d'_n = \sum_{(h_{j-1}, r'_j) \in R(h_j)} h_{j-1} r'_j d'_j d'_{j+1} \cdots d'_n r''_{j-1},$$

όπου $d''_{j+1} \in \mathcal{D}'_{j+1, j-2}, \dots, d''_n \in \mathcal{D}'_{n, j-2}$. Ως επακόλουθο έχουμε ότι

$$\phi(h) = \sum_{(h_j, d'_{j+1}, \dots, d'_n) \in I_j} \sum_{(h_{j-1}, r'_j) \in R(h_j)} \phi(r''_{j-1} h_{j-1} r'_j d'_j d'_{j+1} \cdots d'_n).$$

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα σύνολα δεικτών σε ένα νέο σύνολο $I_{j-1} \subseteq H_{j-1} \times \mathcal{D}'_{j,j-2} \times \cdots \times \mathcal{D}'_{n,j-2}$ και προκύπτει μια νέα έκφραση όπως η προηγούμενη έχοντας το j αντικατασταθεί από το $j-1$. Την διαδικασία αυτή την επαναλαμβάνουμε έως ότου $j=1$, όπου θα έχουμε $H_1 = \langle 1, t \rangle = \langle \mathcal{D}'_1 \rangle$ με το οποίο και ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

2.4.2 Ίχνη Markov σε Άλγεβρες Hecke τύπου \mathcal{B}

Ο Jones στο [Jon, σελ. 346] έγραψε ότι ίσως υπάρχει ανάλογο του ίχνους του Ocneanu, για άλλες άλγεβρες Hecke πέραν της άλγεβρας Hecke \mathcal{A} . Το ίχνος που δόθηκε στο [Lam₁] ήταν το πρώτο ανάλογο που δόθηκε για άλγεβρες Hecke τύπου \mathcal{B} . Στην υποσημείωση αυτή, παρουσιάζουμε το Θεώρημα Ταξινόμησης (για απόδειξη βλέπε [GeL, σελ. 203]) των ίχνων Markov για άλγεβρες Hecke τύπου \mathcal{B} , εφόσον πρώτα παρουσιάσουμε το ακόλουθο λήμμα το οποίο περιγράφει ένα σύνολο στοιχείων της H , το οποίο είναι αρκετό για τον προσδιορισμό του ίχνους Markov τ . Έστω $\mathcal{H} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$. Τότε έχουμε:

ΛΗΜΜΑ 2.5 Έστω $\tau : H \rightarrow A$ ίχνος Markov με παράμετρο $z \in A$.

(a) Αν $n \geq 1$, $m \geq 0$ και $h \in H_n$, τότε

$$\tau(hg_n t'_{n+1} \cdots t'_{n+m}) = z\tau(ht'_n \cdots t'_{n+m-1})$$

και

$$\tau(ht'_{n+1} \cdots t'_{n+m}) = \tau(ht'_n \cdots t'_{n+m-1})$$

(b) Αν $h = d_1 \cdots d_n \in H$ όπου $d_i \in \mathcal{D}'_i$, $\forall i$, τότε

$$\tau(h) = z^{\alpha(h)} \tau(t'_0 t'_1 \cdots t'_{b(h)-1})$$

όπου $\alpha(h)$ είναι το πλήθος των $d_i \in \{g_1, \dots, g_{n-1}\}$ και $b(h)$ είναι το πλήθος των d_i που είναι συζυγή με το t .

(c) Το τ προσδιορίζεται μοναδικά από τις τιμές που παίρνει στα στοιχεία του συνόλου

$$\{t'_0 t'_1 \cdots t'_{k-1} \mid k = 1, 2, \dots\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η σχέση (a) θα αποδειχθεί με επαγωγή στο m . Αν $m=0$ μπορούμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν τον κανόνα (3) του Θεωρήματος 2.1. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $m > 0$. Τότε έχουμε να υπολογίσουμε την έκφραση

$$\tau(hg_n t'_{n+1} \cdots t'_{n+m}).$$

Όμως $t'_{n+1} = g_{n+1} t'_n g_{n+1}^{-1}$ και παρατηρούμε ότι το g_{n+1}^{-1} αντιμετατίθεται με τα $t'_{n+2}, \dots, t'_{n+m}$ από το Λήμμα 2.4(a). Αφού το τ είναι ίχνος η έκφρασή μας είναι ισοδύναμη με την

$$\tau(g_{n+1}^{-1} hg_n g_{n+1} t'_n t'_{n+2} \cdots t'_{n+m}).$$

2.4. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΙΧΝΩΝ MARKOV ΓΙΑ ΑΛΓΕΒΡΕΣ HECKE ΤΥΠΟΥ B45

Τώρα, το $h \in H_n$ που συνεπάγεται ότι εμπεριέχει μόνο γενήτορες της μορφής t, g_1, \dots, g_{n-1} . Έτσι το h αντιμετατίθεται με το g_{n+1}^{-1} . Χρησιμοποιώντας επιπλέον τη σχέση $g_{n+1}^{-1}g_n g_{n+1} = g_n g_{n+1} g_n^{-1}$, η τελευταία έκφραση παίρνει τη μορφή

$$\tau(h g_n g_{n+1} g_n^{-1} t'_n t'_{n+2} \cdots t'_{n+m}).$$

Αν κάνουμε την αντικατάσταση $t'_n = g_n t'_{n-1} g_n^{-1}$, τότε ο όρος g_n που βρίσκεται στα αριστερά θα ακυρωθεί και τότε το g_{n+1} θα αντιμετατεθεί με το t'_{n-1} . Κι έτσι η έκφρασή μας γίνεται

$$\tau(h g_n t'_{n-1} g_{n+1} g_n^{-1} t'_{n+2} \cdots t'_{n+m}).$$

Το στοιχείο g_n^{-1} αντιμετατίθεται με όλους του όρους που βρίσκονται στα δεξιά του. Έτσι η έκφρασή μας είναι ισοδύναμη με

$$\tau(g_n^{-1} h g_n t'_{n-1} g_{n+1} t'_{n+2} \cdots t'_{n+m}).$$

Ορίζουμε $h' := g_n^{-1} h g_n t'_{n-1}$ και παρατηρούμε ότι το στοιχείο αυτό ανήκει στο H_{n+1} . Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγή απ' όπου προκύπτει ότι:

$$\tau(h g_n \underbrace{t'_{n+1} \cdots t'_{n+m}}_{\#m}) = \tau(h' g_{n+1} \underbrace{t'_{n+2} \cdots t'_{n+m}}_{\#m-1}) = z \tau(h' t'_{n+1} \cdots t'_{n+m-1}).$$

Αντικαθιστώντας πάλι την έκφραση του h' , παρατηρούμε ότι το g_n^{-1} αντιμετατίθεται με το $t'_{n+1} \cdots t'_{n+m-1}$ και καταλήγουμε ότι:

$$\tau(h t'_{n+1} \cdots t'_{n+m}) = \tau(h g_n t'_{n-1} g_n^{-1} t'_{n+1} \cdots t'_{n+m-1}) = \tau(h t'_{n+1} \cdots t'_{n+m-1}).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας τα προηγούμενα ολοκληρώνεται η απόδειξη για την πρώτη σχέση του (a). Η απόδειξη για την δεύτερη προκύπτει με ανάλογους υπολογισμούς (αντικαθιστώντας το g_n με το 1). Για να αποδειχθεί το (b) εξετάζουμε το στοιχείο της μορφής

$$h = d_1 \cdots d_n \in H_n \text{ όπου } d_i \in \mathcal{D}'_i, \forall i.$$

Χρησιμοποιώντας το (a) και επαγωγή στο n καταλήγουμε ότι

$$\tau(h) = z^{\alpha(h)} \tau(t'_0 t'_1 \cdots t'_{b(h)-1})$$

όπου $\alpha(h)$ είναι το πλήθος των $d_i \in \{g_1, \dots, g_{n-1}\}$ και $b(h)$ είναι το πλήθος των d_i που είναι συζυγή με το t . Τέλος λαμβάνοντας υπ' όψιν μας τις δύο παρατηρήσεις πριν την Πρόταση 2.2, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αυτές οι εξισώσεις (που προκύπτουν από τον ισχυρισμό (c)), προσδιορίζουν το τ μοναδικά το οποίο και αποδεικνύει το (c). \square

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5 Έστω $z, y_1, y_2, \dots \in A$. Τότε υπάρχει μοναδικό ίχνος Markov τ στην H με παράμετρο z τέτοιο ώστε

$$\tau(t'_0 t'_1 \cdots t'_{k-1}) = y_k, \quad \forall k \geq 1.$$

46 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΚΟΤΣΙΔΕΣ ARTIN ΤΥΠΟΥ Β ΚΑΙ ΙΧΝΗ MARKOV ΤΥΠΟΥ Β

Σκιαγράφηση Απόδειξης:

Η μοναδικότητα έχει ήδη αποδειχθεί στο Λήμμα 2.5. Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας τις δύο παρατηρήσεις πριν την Πρόταση 2.2, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση ίχνους τ στην H ικανοποιώντας τις σχέσεις $\tau(1) = 1$ και

$$\tau(g_C) = z_\alpha y_b$$

όπου $g_C = d_1 \cdots d_n$ με $d_i \in \mathcal{D}'_i$, $\forall i$ και τα στοιχεία $a = a(g_C)$, $b = b(g_C)$ είναι ορισμένα όπως και στο Λήμμα 2.5. Έτσι οι συνθήκες (1) και (2) του Ορισμού 1.6 ικανοποιούνται και μένει να δείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για τη συνθήκη (3).

Αυτό θα αποδειχθεί με επαγωγή. Έστω $H(\leq N)$ για $N \geq 0$ ένας A -υπόχωρος της H που παράγεται από όλα τα στοιχεία g_w , $w \in W$ και $l(w) \leq N$. Ακολούθως αποδεικνύουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό για κάθε $N \geq 0$.

(*) Έστω $h \in H$ και $d_{n+i}^* \in \mathcal{D}'_{n+i,0}$ (για $n, m \geq 1$ και $i = 1, \dots, m$) τέτοια ώστε $hd_{n+1}^* \cdots d_{n+m}^* \in H(\leq N)$. Τότε

$$\tau(hd_{n+1}^* \cdots d_{n+m}^*) = \tau(hd_{n+1} \cdots d_{n+m})$$

και

$$\tau(hg_n d_{n+2}^* d_{n+3}^* \cdots d_{n+m}^*) = z\tau(hd_{n+2}^* \cdots d_{n+m}^*).$$

Αν αυτό αποδειχθεί για κάθε N , τότε το τ θα ικανοποιεί την συνθήκη (3) του Ορισμού 1.6 ως ειδική περίπτωση, με το οποίο και ολοκληρώνεται η απόδειξη.

ο.ε.δ.

Κεφάλαιο 3

Τα Ανάλογα του Πολυωνύμου Jones 2-μεταβλητών στον Στερεό Τόρο

3.1 Κόμβοι στον Στερεό Τόρο

Είναι γνωστό ότι κάθε στερεό τόρο M μπορούμε να τον δούμε και ως το συμπλήρωμα στην S^3 ενός άλλου στερεού τόρου \hat{I} , δηλαδή θα ισχύει $M = S^3 \setminus \hat{I}$. Έτσι τους κόμβους στον M μπορούμε να τους αναπαραστήσουμε από μεικτούς κόμβους την S^3 υπό την έννοια ότι εμπεριέχουν τον συμπληρωματικό στερεό τόρο υπό τη μορφή της απλής κλειστής καμπύλης \hat{I} (βλέπε Σχ. 3.1). Επιπλέον για να αποφύγουμε τυχόν ασάφειες, σταθεροποιούμε σημειακά μια προβολή της \hat{I} και της προσδίδουμε προσανατολισμό. Έτσι κάθε κόμβος L στον M αναπαρίσταται μοναδικά από τον μεικτό κόμβο $\hat{I} \cup L$ στην S^3 . Κατα συνέπεια ως διάγραμμα μεικτού κόμβου μπορούμε να ορίσουμε μια κανονική προβολή $\hat{I} \cup \tilde{L}$ του $\hat{I} \cup L$ στο επίπεδο της σταθεροποιημένης προβολής του \hat{I} .



Σχήμα 3.1: Αναπαράσταση ενός κόμβου μέσα στον τόρο, ως μεικτός κόμβος.

Η έννοια της ισοτοπίας για κόμβους στον στερεό τόρο ορίζεται όπως και η ισοτοπία στην S^3 . Προτιμούμε όμως να μεταφράσουμε την ισοτοπία στον M σε ισοτοπία μεικτών κόμβων στην S^3 , προκειμένου να μελετήσουμε κόμβους στον M χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της κλασικής θεωρίας κόμβων. Πράγματι, ισχύει το εξής: οι L_1 και L_2

είναι ισοτοπικοί κόμβοι στο M αν και μόνο αν οι μεικτοί κόμβοι $\hat{I} \cup L_1$ και $\hat{I} \cup L_2$ είναι ισοτοπικοί στην S^3 , μέσο ισοτοπίας που κρατάει το \hat{I} σταθερό στο επίπεδο προβολής του. Από την σκοπιά των διαγραμμάτων, προστίθενται (προκαλούνται) δύο επιπλέον (τοπικές) κινήσεις ισοτοπίας μεταξύ των μεικτών διαγραμμάτων όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2, όπου το \hat{I} συμμετέχει “παθητικά”.



Σχήμα 3.2: Κινήσεις ισοτοπίας μεταξύ των μεικτών διαγραμμάτων.

Έτσι προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1 (Θεώρημα Reidemeister για κόμβους στον στεραιό τόρο)
 Δύο κόμβοι στον M είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν δύο αντίστοιχα μεικτά διαγράμματα αυτών στην S^3 διαφέρουν κατά κινήσεις ισοτοπίας επιπέδου και κατά πεπερασμένη ακολουθία των τριών κινήσεων Reidemeister για το κλασικό μέρος του μεικτού κόμβου καθώς και των μεικτών κινήσεων Reidemeister όπως του Σχ. 3.2.

Από τα παραπάνω εύκολα συμπεραίνουμε το ακόλουθο, το οποίο χαρακτηρίζεται σαν έλεγχος μή-ισοτοπίας:

Δεδομένων δύο κόμβων στον M , στην ερώτηση αν είναι ισοτοπικοί ή όχι, τους εξετάζουμε σαν κόμβους στην S^3 και αν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δέν είναι ισοτοπικοί στην S^3 , τότε δεν είναι ούτε στον M .

3.2 Θεωρήματα Alexander και Markov για Κόμβους στον Στερεό Τόρο

Όπως έχουμε ήδη δει ένας κλασικός τρόπος για να εξάγουμε αποτελέσματα για τους κόμβους είναι η μελέτη των κοτσίδων. Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι ένας κόμβος στον στερεό τόρο αναπαρίσταται μοναδικά από έναν μεικτό κόμβο στην S^3 . Εύκολα λοιπόν κάποιος μπορεί να σκεφτεί ότι προκειμένου να προκύψει από τον κόμβο αυτόν μια κοτσίδα, αρκεί να εφαρμόσει στον μεικτό κόμβο οποιοδήποτε αλγόριθμο-απόδειξη, του κλασικού θεωρήματος Alexander¹. Τότε όμως προκύπτει το ακόλουθο πρόβλημα: Κατά

¹Υπάρχει μια ποικιλία από αποδείξεις του θεωρήματος Alexander, κάθε μία από τις οποίες δίνει και έναν διαφορετικό αλγόριθμο για την κατασκευή μιας κοτσίδας από ένα διάγραμμα κόμβου.

3.2. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ALEXANDER ΚΑΙ MARKOV ΓΙΑ ΚΟΜΒΟΥΣ ΣΤΟΝ ΣΤΕΡΕΟ ΤΟΡΟ 49

την διαδικασία μετατροπής του μεικτού κόμβου σε κοτσίδα ενδέχεται να καταλήξουμε σε περισσότερες από μία κλωστές για τον συμπληρωματικό στερεό τόρο \hat{I} , και έτσι μετά το κλείσιμό του το \hat{I} δεν θα έχει παραμείνει απαραίτητα ως είχε, δηλαδή σταθερό. Σε αυτό το σημείο ως θυμίζουμε τον ορισμό της κοτσίδας τύπου B . Οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι αν ξεπεράσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα τότε οι κοτσίδες που θα καταλήγουμε θα μπορούσαν να είναι κοτσίδες τύπου B . Πράγματι, όπως θα δούμε λίγο πιο κάτω, αυτό μας το εξασφαλίζει το Θεώρημα *Alexander* για τον στερεό τόρο.

Τις κοτσίδες τύπου B μπορούμε να τις ορίσουμε γεωμετρικά και μέσω των μεικτών κόμβων, αποδίδοντάς τους με έμμεσο τρόπο την ιδιότητα που τις χαρακτηρίζει από τον ορισμό τους στο Κεφάλαιο 2.

Έτσι έχουμε τον ακόλουθο εναλλακτικό ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1 (Εναλλακτικός ορισμός των κοτσίδων Artin τύπου B) Μεικτή κοτσίδα $I \cup B$, ονομάζεται κάθε κοτσίδα στην S^3 της οποίας το κλείσιμο αποτελεί έναν μεικτό κόμβο, όπου η σταθερή συνιστώσα του έχει προκύψει από το κλείσιμο της πρώτης κλωστής I (βλέπε Σχήμα 2.1). Η αρίθμηση στις κλωστές της μεικτής κοτσίδας γίνεται απαριθμώντας μόνο το κλασικό της μέρος.

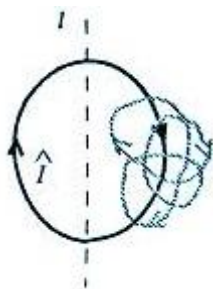
Ως επακόλουθο του Ορισμού 3.1, τις κοτσίδες *Artin* τύπου B θα τις ονομάζουμε και *μεικτές κοτσίδες*.

Χρειαζόμαστε λοιπόν μια διαδικασία μετατροπής κόμβων σε κοτσίδες η οποία θα μας εγγυάται ότι από έναν μεικτό κόμβο θα προκύψει μια μεικτή κοτσίδα. Το ακόλουθο θεώρημα μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τέτοιας διαδικασίας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2 (Θεώρημα *Alexander* για τον στερεό τόρο) Κάθε προσανατολισμένος μεικτός κόμβος είναι ισοτοπικός με το κλείσιμο μιας μεικτής κοτσίδας.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ : Αρχικά ισοτοπούμε τον μεικτό κόμβο όπως στο Σχ 3.3, μαζεύοντας και γλιστρώντας το κλασικό μέρος του. Έπειτα εφαρμόζουμε στο δεξί μέρος της ευθείας l (Σχ 3.3) οποιαδήποτε διαδικασία μετατροπής κόμβου σε κοτσίδα η οποία δεν επηρεάζει το τμήμα της συνιστώσας \hat{I} με προσανατολισμό προς τα κάτω· όλοι οι αλγόριθμοι μετατροπής κόμβου σε κοτσίδα έχουν αυτή την ιδιότητα. Τέλος εξαλείφουμε το μέρος της συνιστώσας \hat{I} που έχει φορά προς τα επάνω (από τα αριστερά της ευθείας l), κόβοντάς την σ' ένα τυχαίο σημείο και ισοτοπώντας τα δύο άκρα της έτσι ώστε να προκύψει μια μεικτή κοτσίδα. \square

Η τεχνική μετατροπής μεικτού κόμβου σε μεικτή κοτσίδα, που μόλις παρουσιάσαμε, είναι πολύ αποτελεσματική για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, αλλά δεν είναι καθόλου βολική αλγοριθμικά για την απόδειξη ενός Θεωρήματος *Markov* για μεικτές κοτσίδες.



Σχήμα 3.3: Διαδικασία ισοτοπισμού μεικτού κόμβου σε μεικτή κοτσίδα.

Έτσι έχει αναπτυχθεί από την Λαμπροπούλου (βλεπε [Lam1]), μια διαδικασία μετατροπής κόμβου σε κοτσίδα η οποία είναι πιο κατάλληλη και συγχρόνως η κλωστή που αντιστοιχεί στην συνιστώσα \hat{I} του μεικτού διαγράμματος $\hat{I} \cup \tilde{L}$ είναι μία και μοναδική. Ο αλγόριθμος αυτός αφήνει τα τμήματα του κόμβου που έχουν προσανατολισμό προς τα κάτω αμετακίνητα. Επιπλέον η βασική κίνηση μετατροπής ενός τόξου με προσανατολισμό προς τα πάνω σε ζευγάρι αντίστοιχων κλωστών είναι εντελώς θεμελιώδης. Με αυτόν τον τρόπο η απόδειξη του κλασικού Θεωρήματος *Markov* απλουστεύεται αρκετά [LR]. Από την απόδειξη αυτή προκύπτει και το ακόλουθο, πιο ισχυρό αποτέλεσμα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3 (Σχετική εκδοχή του Θεωρήματος *Markov*) Δύο κόμβοι που περιέχουν το ίδιο τμήμα κοτσίδας (*braided part*) είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν οποιοσδήποτε δύο αντίστοιχες κοτσίδες που περιέχουν το ίδιο τμήμα κοτσίδας, διαφέρουν κατα ισοτοπία στο επίπεδο, συζυγία και κινήσεις *Markov*, οι οποίες δέν επηρεάζουν το υπάρχον τμήμα κοτσίδας.

ΣΧΟΛΙΟ : Συγκεκριμένα, όλοι οι μεικτοί κόμβοι περιέχουν το ίδιο τμήμα κοτσίδας \hat{I} . Έτσι με τον προαναφερθέντα αλγόριθμο όλες οι αντίστοιχες κοτσίδες περιέχουν το ίδιο κομμάτι κοτσίδας I . Συνεπώς, το ανάλογο του Θεωρήματος *Markov* για κόμβους μέσα στον τόρο, ισοδυναμεί με μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3.3. Επιπλέον η γνώση ότι το σύνολο των μεικτών κοτσίδων $B_{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$, αποτελεί ομάδα, βοηθάει στο να εκφράσουμε το ανάλογο του Θεωρήματος *Markov* για μεικτούς κόμβους αλγεβρικά (και όχι μόνο γεωμετρικά όπως το Θεώρημα 3.3).

Από τα παραπάνω προκύπτει το ακόλουθο:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4 (Θεώρημα *Markov* για κόμβους μέσα σε στερεό τόρο) Έστω $M = S^3 \setminus \hat{I}$ ένας στερεός τόρος και έστω L_1, L_2 δύο προσανατολισμένοι κόμβοι στον M . Έστω ακόμη $I \cup B_1, I \cup B_2 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n}$ αντίστοιχες μεικτές κοτσίδες τους. Τότε ο L_1 είναι ισοτοπικός με τον L_2 στον M αν και μόνο αν η $I \cup B_1$ είναι ισοδύναμη με την $I \cup B_2$ στο $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n}$ με ισοδυναμία που δημιουργείται από τις σχέσεις ισοτοπίας των μεικτών κοτσίδων μαζί με τις ακόλουθες δύο κινήσεις:

- (i) Συζυγία: Αν $\alpha, \beta \in B_{1,n}$ τότε $\alpha \sim \beta^{-1}\alpha\beta$
(ii) Κινήσεις Markov: Αν $\alpha \in B_{1,n}$ τότε $\alpha \sim \alpha\sigma_n^{\pm 1} \in B_{1,n+1}$.

3.3 Κατασκευή Αναλλοίωτων για Κόμβους μέσα στον Τόρο

3.3.1 Μία Αναλλοίωτη Κόμβων μέσα στον Τόρο

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2 ο επιμορφισμός $\pi : \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{CB}_{1,n} \mapsto \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n(q, Q)$ που ορίζεται στέλνοντας το $T \mapsto t$, $\sigma_i \mapsto g_i$ (και έτσι $T_i \mapsto t'_i$, όπου $T_i = \sigma_i \dots \sigma_1 T \sigma_1^{-1} \dots \sigma_i^{-1}$ και $t'_i = g_i \dots g_1 t g_1^{-1} \dots g_i^{-1}$), μαζί με την συνάρτηση ίχνους tr , έχει ως αποτέλεσμα σε κάθε μεικτή κοτσίδα της $B_{1,n}$ να μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια έκφραση των μεταβλητών q, Q, z, s .

Στην παράγραφο αυτή θα κινηθούμε κατα τρόπο ανάλογο της Παραγράφου 1.3.3. Έτσι, κατ' αντιστοιχία παρατηρούμε ότι οι κινήσεις (i), (ii) του Θεωρήματος 3.4 μοιάζουν με τις ιδιότητες 1) και 3) του Θεωρήματος 2.1. Προκειμένου λοιπόν να εξασφαλίσουμε αναλλοίωτες κόμβων τύπου *HOMFLYPT* θα πρέπει κατ' αρχάς να κανονικοποιήσουμε τα g_i έτσι ώστε και οι δύο κινήσεις Markov να επηρεάζουν το ίχνος με τον ίδιο τρόπο. Έτσι, κανονικοποιούμε τα g_i σε θg_i , $\theta \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε να έχουμε:

$$tr(a(\theta g_n)) = tr(a((\theta g_n)^{-1})) \quad \text{για } a \in \mathcal{H}_n(q, Q).$$

Τότε, για $z \neq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \theta^2 tr(ag_n) &= tr(ag_n^{-1}) = \frac{1}{q} tr(ag_n) + \frac{1-q}{q} tr(a) \iff \\ \theta^2 z tr(a) &= \frac{z+1-q}{q} tr(a) \iff \theta^2 = \frac{z+1-q}{qz} = \lambda. \end{aligned}$$

Έτσι

$$tr(\sqrt{\lambda}g_i) = tr((\sqrt{\lambda}g_i)^{-1}) = \sqrt{\lambda}z = -\sqrt{\lambda} \frac{1-q}{1-\lambda q}.$$

Τώρα είναι άμεσο ότι αν αναπαραστήσουμε την $B_{1,n}$ στην $\mathcal{H}_n(q, Q)$ με την π_λ , όπου $\pi_\lambda(\sigma_i) = \sqrt{\lambda}g_i \in \mathcal{H}_n(q, Q)$ και $\pi_\lambda(T) = t \in \mathcal{H}_n(q, Q)$, (όπου επίσης υπονοείται ότι $\pi_\lambda(T_i) = t'_i \in \mathcal{H}_n(q, Q)$), τότε η συνάρτηση των q, λ, Q, s που δίνεται από την σχέση

$$\left[-\frac{1-\lambda q}{\sqrt{\lambda}(1-q)} \right]^{n-1} tr(\pi_\lambda(\alpha)), \quad \text{για } \alpha \in B_{1,n},$$

εξαρτάται μόνο από τον μεικτό κόμβο $\hat{\alpha}$ (το κλείσιμο του α). Ας σημειωθεί ότι ο όρος $(-(1-\lambda q)/\sqrt{\lambda}(1-q))^{n-1}$ προέκυψε από την απαίτηση ύπαρξης μιας συνάρτησης η οποία να δίνει την ίδια τιμή για τις α και $\alpha\sigma_n \forall n \in \mathbb{N}$. Ο επιμορφισμός π , παρ' όλα αυτά, έχει το πλεονέκτημα ότι εμπλέκει μόνο τις μεταβλητές q, Q . Για αυτό ενσωματώνουμε το $\sqrt{\lambda}$ στον γενικό συντελεστή και ορίζουμε:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2 Η απεικόνιση $X_{\widehat{I \cup L}}(q, Q, \lambda, s)$ ενός προσανατολισμένου μεικτού κόμβου $\widehat{\alpha} := \widehat{I \cup L}$ που αναπαριστά έναν προσανατολισμένο κόμβο μέσα σε στερεό τόρο M και ορίζεται ως:

$$X_{\widehat{\alpha}} = X_{\widehat{I \cup L}}(q, Q, \lambda, s) = \left[-\frac{1 - \lambda q}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right]^{n-1} (\sqrt{\lambda})^e \text{tr}(\pi(\alpha))$$

όπου $\alpha \in B_{1,n}$ είναι μια λέξη αποτελούμενη από σ_i και t'_i , e είναι το εκθετικό άθροισμα των σ_i που εμφανίζονται στην α , και π η αναπαράσταση της $B_{1,n}$ στην $\mathcal{H}_n(q, Q)$ τ.ω $t \mapsto t, \sigma_i \mapsto g_i$, είναι μια αναλλοίωτη ισοτοπίας.

Πράγματι είναι πολύ εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι $X_{\widehat{\alpha}} = X_{\widehat{\alpha\sigma_n}} = X_{\widehat{\alpha\sigma_n^{-1}}}$.

ΣΧΟΛΙΟ : Εξ' ορισμού, οι μεικτές κοτσίδες T και T_i δεν επηρεάζουν το εκθετικό άθροισμα e , έτσι λοιπόν μπορούμε να τις αγνοήσουμε κατά τον υπολογισμό του e .

3.3.2 Γενικευμένες και Κυκλοτομικές Αναλλοίωτες Κόμβων μέσα στον Τόρο

Η παράγραφος αυτή αναπτύσσεται κατά τρόπο ανάλογο των Παραγράφων 1.3.3 και 3.2.1. Έστω λοιπόν π^* ο επιμορφισμός που δημιουργείται μέσω του Ορισμού 2.3, δηλαδή $\pi^* : \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{CB}_{1,n} \mapsto \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n$, όπου με \mathcal{H}_n υπονοούμε $\mathcal{H}_n(q, d)$ ή $\mathcal{H}_n(q, \infty)$. Τότε κάθε μεικτή κοτσίδα στο $B_{1,n}$ απεικονίζεται μέσω της tr ο π^* σε μια έκφραση από μεταβλητές $q, u_1^{\pm 1}, \dots, u_d^{\pm 1}, \dots, z, (s_k)$, $k \in \mathbb{Z}$ αντίστοιχα \mathbb{Z}_d . Τώρα κατ' ανάλογο τρόπο προκειμένου να εξασφαλίσουμε μια αναλλοίωτη \mathcal{X} στον στερεό τόρο με χρήση της συνάρτησης ίχνους² tr^* του Θεωρήματος 2.4, θα πρέπει να κάνουμε ανάλογες κανονικοποιήσεις έτσι ώστε να έχουμε

$$\mathcal{X}(\widehat{\alpha}) = \mathcal{X}(\widehat{\alpha\sigma_n}) = \mathcal{X}(\widehat{\alpha\sigma_n^{-1}}).$$

Τα αποτελέσματα, των κανονικοποιήσεων που προκύπτουν είναι τα ίδια με αυτά της προηγούμενης παραγράφου, για αυτόν τον λόγο και θα κρατήσουμε τους ίδιους συμβολισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3 Έστω α , tr^* , π^* όπως παραπάνω. Τότε ορίζουμε:

$$\mathcal{X}_{\widehat{\alpha}} = \mathcal{X}_{\widehat{\alpha}}(q, a_{d-1}, \dots, a_0, \sqrt{\lambda}, s_1, s_2, \dots) := \left[-\frac{1 - \lambda q}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right]^{n-1} (\sqrt{\lambda})^e \text{tr}^*(\pi^*(\alpha)),$$

όπου e είναι το εκθετικό άθροισμα των σ_i που εμφανίζονται στο α και όπου a_{d-1}, \dots, a_0

²Χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό tr^* για να μην υπάρξει σύγχυση με την αντίστοιχη συνάρτηση ίχνους tr του Θεωρήματος 2.1.

(βλέπε Λήμμα 2.1(viii)) είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές των t^{d-1}, \dots, t^1, t^0 του κυκλοτομικού πολυωνύμου. Τότε το $\mathcal{X}_{\hat{\alpha}}$ εξαρτάται μόνο από την κλάση ισοτοπίας του μεικτού κόμβου $\hat{\alpha}$, ο οποίος αντιπροσωπεύει έναν προσανατολισμένο κόμβο στον στερεό τόρο.

Για παράδειγμα στην $\mathcal{H}_n(q, d)$ και για $k \in \mathbb{Z}_d$ έχουμε: αν $\alpha = t^k$, τότε $\mathcal{X}_{\hat{\alpha}} = s_k$.

Παρατηρήσεις

(1) Παρατηρήστε ότι αν μπορούμε έναν κόμβο στον στερεό τόρο να τον κλείσουμε μέσα σε μία τρισδιάστατη μπάλα, αυτό θα είναι ισοδύναμο με το να βρίσκεται ο κόμβος στην S^3 . Τότε θα υπάρχει μια αντίστοιχη μεικτή κοτσίδα α που δεν θα περιέχει t_i . Απο το τελευταίο συνεπάγεται ότι η $\mathcal{X}_{\hat{\alpha}}$ θα έχει την ίδια τιμή με το πολυώνυμο Jones 2-μεταβλητών (HOMFLYPT).

(2) Η συνάρτηση tr αποτελεί ειδική περίπτωση της tr^* , και κατα αναλογία η αναλλοίωτη $X_{\widehat{LUL}}(q, Q, \lambda, s)$ αποτελεί ειδική περίπτωση της αναλλοίωτης $\mathcal{X}_{\hat{\alpha}}(q, a_{d-1}, \dots, a_0, \sqrt{\lambda}, s_1, s_2, \dots)$. Αυτό φαίνεται εύκολα θέτοντας απλά $d = 2$ (με αποτέλεσμα να υπάρχει μόνο η παράμετρος s_1 την οποία και θα ταυτίζουμε με s).

3.4 Σχέσεις Skein για Αναλλοίωτες Κόμβων μέσα στον Τόρο

Έστω τώρα L_+, L_-, L_0 , προσανατολισμένοι κόμβοι οι οποίοι έχουν ταυτόσημα διαγράμματα, εκτός από μία διασταύρωση όπως απεικονίζεται στο σχήμα



Σχήμα 3.4: Διαγράμματα μεικτών κόμβων που διαφέρουν σε συγκεκριμένη διασταύρωση.

Τότε όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, Παράγραφος 1.3.3, μπορεί να οριστεί μια γραμμική σχέση των L_+, L_-, L_0 – γνωστή ως σχέση skein, προκειμένου να οριστεί με επαγωγικό τρόπο το πολυώνυμο HOMFLYPT.

Έτσι και εδώ παρουσιάζεται μια ανάλογη διαδικασία για τις περιπτώσεις των ανάλογων του πολυωνύμου HOMFLYPT [Lam1, Lam2] στο στερεό τόρο. Διακρίνουμε λοιπόν τις δύο ακόλουθες περιπτώσεις:

(I) Σχέσεις skein με χρήση της $\mathcal{H}_n(q, Q)$:

Εξετάζουμε έναν μεικτό κόμβο, ο οποίος μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι το κλείσιμο μιας μεικτής κοτσίδας, και επιλέγουμε μια διασταύρωση του η οποία όμως να μην είναι μεικτή. Με χρήση συζυγίας εύκολα μπορούμε αυτή την διασταύρωση σ_i να την εμφανίσουμε στο τέλος της λέξης της κοτσίδας και μπορούμε να υποθέσουμε (πάλι με συζυγία) ότι $L_0 = \widehat{\alpha\sigma_i}$, $L_+ = \widehat{\alpha\sigma_i^2}$ και $L_- = \widehat{\alpha}$, για κάποιο $\alpha \in B_{1,n}$. Έτσι από τις τετραγωνικές σχέσεις που ορίζονται στην $\mathcal{H}_n(q, Q)$, έχουμε

$$\text{tr}(\pi(\alpha\sigma_i^2)) - q \text{tr}(\pi(\alpha)) = (q - 1) \text{tr}(\pi(\alpha\sigma_i)).$$

Έστω e το εκθετικό άθροισμα του α ως προς τα σ_i , τότε πολλαπλασιάζοντας την προηγούμενη σχέση με $\Lambda \frac{(\sqrt{\lambda})^{e+1}}{\sqrt{q}}$, όπου

$$\Lambda = \left[-\frac{1 - \lambda q}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right]^{n-1},$$

προκύπτει

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{q}\sqrt{\lambda}} \Lambda (\sqrt{\lambda})^{e+2} \text{tr}(\pi(\alpha\sigma_i^2)) - \sqrt{q}\sqrt{\lambda} \Lambda (\sqrt{\lambda})^e \text{tr}(\pi(\alpha)) \\ &= \left(\sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}} \right) \Lambda (\sqrt{\lambda})^{e+1} \text{tr}(\pi(\alpha\sigma_i)) \end{aligned}$$

Έτσι, από τον ορισμό του X , βρίσκουμε την σχέση *skein*:

$$\frac{1}{\sqrt{q}\sqrt{\lambda}} X_{L_+} - \sqrt{q}\sqrt{\lambda} X_{L_-} = \left(\sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}} \right) X_{L_0} \quad (3.1)$$

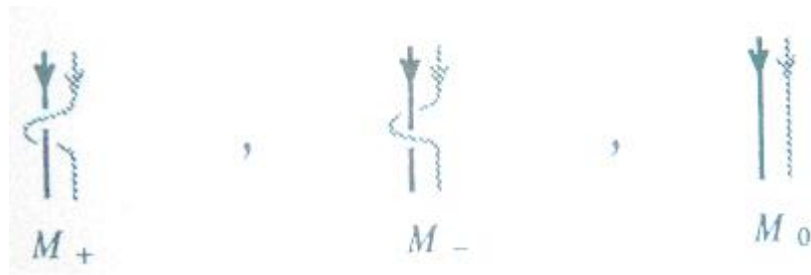
(Από την προηγούμενη σχέση, μαζί με την αρχική συνθήκη $X(\text{unknot}) = 1$, ορίζεται μοναδικά το κλασικό πολυώνυμο *HOMFLYPT*). Με παρόμοιο τρόπο εξασφαλίζουμε μια δεύτερη σχέση *skein* για το μεικτό διάγραμμα, θεωρώντας μεικτές διασταυρώσεις. Αυτή προέρχεται από την σχέση

$$t_i^{-1} = \frac{1}{Q} t_i' + \frac{1 - Q}{Q} \cdot 1$$

ως ακολούθως: Έστω M_+, M_-, M_0 προσανατολισμένοι μεικτοί κόμβοι οι οποίοι έχουν ταυτόσημα διαγράμματα, εκτός από τις περιοχές που απεικονίζονται στο Σχήμα 3.5

Εξετάζουμε λοιπόν έναν μεικτό κόμβο, ο οποίος όπως έχουμε προαναφέρει, μπορεί να υποτεθεί ότι είναι το κλείσιμο μιας μεικτής κοτσίδας και επιλέγουμε σε αυτόν μία θετική μεικτή περιστροφή (βλέπε Σχήμα 3.5). Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιώντας συζυγία στην ομάδα $B_{1,n}$ μπορούμε πάντα να δημιουργήσουμε μία τέτοια περιστροφή. Έτσι, με συζυγία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M_+ = \widehat{\alpha T_i'}$, $M_- = \widehat{\alpha T_i'^{-1}}$ και $M_0 = \widehat{\alpha}$, για κάποιο $\alpha \in B_{1,n}$. Έτσι προκύπτει ότι:

$$\text{tr}(\pi(\alpha T_i'^{-1})) = \frac{1}{Q} \text{tr}(\pi(\alpha T_i')) + \frac{1 - Q}{Q} \text{tr}(\pi(\alpha)).$$



Σχήμα 3.5: Διαγράμματα μεικτών κόμβων που διαφέρουν σε συγκεκριμένη διασταύρωση.

Και αν πολλαπλασιάσουμε την προηγούμενη σχέση με $\Lambda(\sqrt{\lambda})^e \sqrt{Q}$ θα έχουμε

$$\sqrt{Q} \Lambda(\sqrt{\lambda})^e \operatorname{tr}(\pi(\alpha T_i'^{-1})) = \frac{1}{\sqrt{Q}} \Lambda(\sqrt{\lambda})^e \operatorname{tr}(\pi(\alpha T_i')) + \frac{1-Q}{\sqrt{Q}} \Lambda(\sqrt{\lambda})^e \operatorname{tr}(\pi(\alpha)) .$$

Έτσι, εφόσον τα T_i' δεν αλλάζουν το εκθετικό άθροισμα του α , ούτε τον αριθμό των κλωστών, εξασφαλίζουμε την ακόλουθη σχέση *skein*:

$$\frac{1}{\sqrt{Q}} X_{M_+} - \sqrt{Q} X_{M_-} = \left(\sqrt{Q} - \frac{1}{\sqrt{Q}}\right) X_{M_0} \quad (3.2)$$

Εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι οι δύο σχέσεις *skein* μαζί με τις αρχικές συνθήκες

$$X_{\hat{1}} = 1, \quad 1 \in B_{1,1} \quad \text{και} \quad X_{\hat{T}} = s, \quad T \in B_{1,1} \quad (3.3)$$

αρκούν για τον υπολογισμό του X επαγωγικά για κάθε μεικτό κόμβο. Αλλά αν κάποιος θέλει να ορίσει το X με αυτόν τον τρόπο, θα πρέπει επιπλέον να αποδείξει ότι το X είναι καλά ορισμένο.

(II) Σχέσεις *skein* με χρήση της $\mathcal{H}_n(q, d)$ αντίστοιχα $\mathcal{H}_n(q, \infty)$:

Με τρόπο ανάλογο όπως αυτόν της Περίπτωσης (I), η τετραγωνική σχέση των $\mathcal{H}_n(q, d)$ αντίστοιχα $\mathcal{H}_n(q, \infty)$ προκαλεί οι αναλλοιώτες \mathcal{X} να ικανοποιούν την γραμμική σχέση (3.1).

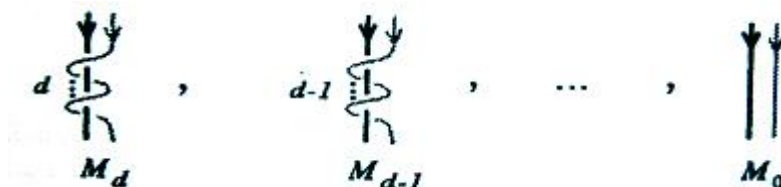
Στην περίπτωση της $\mathcal{H}_n(q, \infty)$ η \mathcal{X} δεν ικανοποιεί άλλη σχέση *skein*.

Στην περίπτωση της $\mathcal{H}_n(q, d)$, έστω M_d, M_{d-1}, \dots, M_0 διαγράμματα προσανατολισμένων μεικτών κόμβων, ταυτόσημων εκτός των περιοχών που απεικονίζονται στο Σχήμα 3.6.

Με χρήση συζηγίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M_d = \widehat{\alpha T_i^d}$, $M_{d-1} = \widehat{\alpha T_i^{d-1}}$, \dots , $M_0 = \widehat{\alpha}$ για $\alpha \in B_{1,n}$. Και έτσι από τη γραμμικότητα του tr :

$$\operatorname{tr}(\pi(\alpha T_i^d)) = a_{d-1} \operatorname{tr}(\pi(\alpha T_i^{d-1})) + \dots + a_0 \operatorname{tr}(\pi(\alpha)).$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε την τελευταία εξίσωση με



Σχήμα 3.6: Διαγράμματα μεικτών κόμβων που διαφέρουν σε συγκεκριμένη διασταύρωση.

$$\left[-\frac{1 - \lambda q}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right]^{n-1} (\sqrt{\lambda})^e$$

παίρνουμε για την αναλλοίωτη \mathcal{X} την ακόλουθη σχέση *skein*:

$$\mathcal{X}_{\alpha T_i^d} = a_{d-1} \mathcal{X}_{\alpha T_i^{d-1}} + \dots + a_0 \mathcal{X}_{M_0} \quad (3.4)$$

Τέλος θα παρουσιάσουμε τις αρχικές συνθήκες που είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό της τιμής της \mathcal{X} με χρήση των σχέσεων *skein* (3.1) και (3.4), για κάθε διάγραμμα κόμβου μέσα στον τόρο. Η συνθήκη

$$\mathcal{X}_{\text{unknot}} = 1$$

είναι αναμενόμενη.

Παρατηρώντας τώρα το Σχ. 3.6 βλέπουμε ότι χρειαζόμαστε και τις αρχικές συνθήκες $\mathcal{X}_{T^k} = s_k$, για $k = 1, \dots, d - 1$.

Το τελευταίο αποτελεί το δεύτερο (και τελευταίο) σύνολο αρχικών συνθηκών. Αν η \mathcal{X} προέρχεται από την κυκλοτομική άλγεβρα *Hecke* $\mathcal{H}_n(q, d)$ τότε ο αριθμός των περιστροφών δεν μπορεί να υπερβεί το $d - 1$. Αντίθετα, στην περίπτωση της $\mathcal{H}_n(q, \infty)$ ο αριθμός των περιστροφών δεν περιορίζεται.

Βιβλιογραφία

- [DJ] R. Dipper, G. James, “*Representations of Hecke algebras of type B_n* ”, Journal of algebra, **146** (1992), 454-481.
- [Fr] John B. Fraleigh, “Εισαγωγή στην Άλγεβρα”, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2002, 3η έκδοση.
- [GL] C.McA. Gordon and J. Luecke, “*Knots are determined by their complements*”, J. Amer. Math. Soc, **2** (1989), 371-415.
- [GeL] M. Geck and S. Lambropoulou, “*Markov traces and knot invariants related to Iwahori – Hecke algebras of type \mathcal{B}* ”, J. reine angew. Math, **482**, No.5, 191-213, 1997.
- [GeP] M. Geck and G. Pfeiffer, “*On the irreducible characters of Hecke algebras*”, Adv. Math, **102**, No.5, 79-94, 1993.
- [Hm1] James E. Humphreys, “*Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*”, Springer, seventh corrected printing, 1997.
- [Hm2] James E. Humphreys, “*Reflection Groups and Coxeter Groups*”, Camb. Stud. in Adv. Math. **29**, Cambridge University Press, 1992.
- [Jon] V.F.R. Jones, “*Hecke algebra representations of braids groups and link polynomials*”, Ann. of Math. **126**, 335-388, 1987.
- [Lam0] S. Lambropoulou, “*A study of braids in 3 – manifolds*”, Ph.D, thesis, Warwick, 1993.
- [Lam1] S. Lambropoulou, “*Solid torus links and Hecke algebras of B – type, Proceedings of the Conference on Quantum Topology*”, D.N.Yetter ed., World Scientific Press, 1994.
- [Lam2] S. Lambropoulou, “*Knots theory related to generalized and cyclotomic Hecke algebra of type \mathcal{B}* ”, J. of Knots Theory and Its Ramifications, **8**, No.5, 621-658, 1999.
- [PS] V.V.Prasolov A.B.Sossinsky, “*Knots, Links, Braids and 3 – Manifolds*”, Transaction of Mathematical Monography of the AMS **154**, 1997.

